Демисенов
Берик Нуртазинович

ТЕОРИЯ НЕОГРАНИЧЕННОСТЕЙ

ФИЛОСОФСКО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

КОСТАНАЙ
2007–2021

ПОСВЯЩАЕТСЯ ПАМЯТИ

моего отца Демисенова Нуртазы Досмагуловича

моего Учителя Кукина Георгия Петровича

Министерство образования и науки
Республики Казахстан
Костанайский региональный университет имени А. Байтурсынова

ДЕМИСЕНОВ БЕРИК НУРТАЗИНОВИЧ

ТЕОРИЯ НЕОГРАНИЧЕННОСТЕЙ

ФИЛОСОФСКО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

Республика Казахстан

КОСТАНАЙ
2007-2021

УДК 510.21, 517.13
ББК 22.12

Демисенов Берик Нуртазинович

Теория неограниченностей. Философско-алгебраическое обоснование анализа бесконечно малых величин. 144 с.

В работе, благодаря использованию диалектического подхода Гегеля, показано, что натуральный ряд является переходным состоянием между конечным и бесконечным, по сути счетно неограниченным. В кольце сходящихся последовательностей, построен **идеал $\boldsymbol{J}$** и получена интерпретация понятия «бесконечно малая величина» в фактор-кольце P_J, как смежные классы неограниченно малых последовательностей по идеалу J. Введены определения аддитивного и мультипликативного (квази)подобия, благодаря которым объясняется когда с неограниченно малыми последовательностями обращаются как с нулями, пренебрегая ими, а когда на них можно делить. Дж. Беркли был бы удовлетворен. Отделены понятия числа и точки на вещественной прямой. Рассматривая сходящиеся последовательности как сходящиеся итерационные процессы, были доказаны принцип вложенных отрезков, и «аксиома непрерывности» Дедекинда. Переосмыслена конструкция «Отель Гильберта». Введено понятие степенного квазиподобия, на основе которого показано, что вещественные числа всего лишь всюду плотны на вещественной прямой. А непрерывность определялась лишь с точностью до «бесконечно малых величин». Осуществлена классификация и построена арифметика неограниченностей. Показано, что конструкции построения вещественных чисел Вейерштрасса и Кантора вполне вписываются в построенную в работе конструкцию. Показана некорректность построения множества Витали. Объяснены парадоксы Кавальери, Банаха-Тарского, а также апории Зенона Элейского.

ББК 22.12

Список обозначений

обозначение	определение	пункт
P	коммутативное ***кольцо*** сходящихся числовых последовательностей с вещественными членами	2.1.1
R	поле вещественных чисел	2.1.1
$\{a_n\}$	последовательности вещественных чисел	2.1.1
$[a]$ или $[\{a_n\}] = \{a_n\} + I.$	смежный класс в кольце P по идеалу I. $\{a_n\}$ – сходящаяся последовательность к a	2.1.1
S	мультипликативный моноид в кольце P всех последовательностей без нулевых членов	2.2.1
$\bar{P}$	множество всех последовательностей вещественных чисел (не только сходящихся), оно является кольцом относительно операций покомпонентного сложения и умножения	2.2.1
S_I	мультипликативная полугруппа последовательностей из $I \subset P$ без нулевых членов	2.2.1
J	$J = \big\{\{c_n\} \mid \text{существует } k, \text{такое, что } c_m = 0, \text{при } m > k, c_n \in R, k, m \in N\big\}.$	2.2.2
P_J	факторкольцо $P/J = P_J$ состоит из смежных классов, таких, что разность между двумя последовательностями из одного класса принадлежит идеалу J	2.2.2
I_J	$I_J = I/J$ факторидеал по идеалу J	2.2.2
$\{\bar{a}_n\} + I_J = (\{a_n\} + J) + I_J$	смежные классы последовательностей по идеалу J в факторкольце P_J/I_J, будем рассматривать как **выделенные** представители (элементы) тех или иных смежных классов по идеалу I_J	2.2.2
S_J	множество S_J всех смежных классов последовательностей по идеалу J, представители которых, содержат конечное число неположительных членов	2.2.2
S_+	множество сходящихся последовательностей, содержащих лишь конечное число неположительных членов	2.2.2
U	множество всех последовательностей, которые сходятся к нулю и имеют лишь конечное число неположительных членов через U $(U \subset S_+)$	2.2.2

U_J	множество смежных классов по идеалу J, которым принадлежат последовательности из U	2.2.2
$\widetilde{U}$	множество последовательностей из U с положительными членами	2.2.2
$\widetilde{S_+ \setminus U}$	множество последовательностей $\{\widetilde{s_n}\}$ из $S_+ \setminus U$ (теоретико-множественная разность), состоящих только из положительных членов. Каждая из них принадлежит какому-то смежному классу из $S_J \setminus U_J$	2.2.2
$\overline{S_J}$	$\overline{S_J}$ – мультипликативный моноид всех элементов факторкольца P_J, представители которых содержат конечное число нулевых членов	4.1.1
$\overline{U}_J$	множество смежных классов из $\overline{S_J}$, представители которых сходятся к нулю и имеют лишь конечное число нулевых членов.	4.1.1
$S_{\overline{1}}$	Обозначим через $S_{\overline{1}} \in S_+ \subset P$ последовательности из S_+, которые содержат конечное число единиц.	6.1.1
U_+^{-1}	множество всех неограниченно больших положительных последовательностей из $\bar{P}$ можно обозначить через U_+^{-1},	7.1.4
U_-^{-1}	аналогично, U_-^{-1} обозначает множество всех неограниченно больших отрицательных последовательностей.	7.1.4
B	$B = P \cup U_+^{-1} \cup U_-^{-1}$	7.1.4
B_J	$B_J = P_J \cup U_{J^+}^{-1} \cup U_{J^-}^{-1}$, где $U_{J^+}^{-1} = U_+^{-1}/J$, $U_{J^-}^{-1} = U_-^{-1}/J$.	7.1.4

Введение

Демисенов Берик Нуртазинович

Костанай, Казахстан

Костанайский государственный
педагогический институт,

Костанайский государственный
педагогический университет имени У.Султангазина,
(преобразован в 2018)

Костанайский региональный
университет имени А.Байтурсынова,
(преобразован в 2020)

Данная работа является дальнейшим развитием идей статей [1-3] автора, которые возникли, благодаря курсу «Философские проблемы математики», читавшемуся мной для магистрантов в Костанайском государственном педагогическом институте с 2007 по 2011 год.

Любые притязания на обоснование математики вызывают у специалистов определенный **скепсис**, и это справедливо. За достаточно продолжительное время сложились некие представления, которые варьируются от некорректности вопроса обоснования, так как математика не требует обоснования и её обоснование состоит в эффективном применении, до неразрешимости этого вопроса в принципе. Сама постановка вопроса обоснования математики носит неопределенный и достаточно широкий, а потому расплывчатый характер. Прежде всего, большинство проблем и противоречий связано с понятием бесконечности. Иже с ним идет понятие «бесконечно малая величина». Считается, что теория пределов справилась с этим понятием, но на самом деле она лишь нивелировала это понятие.

Обоснование математики лежит через обоснование анализа бесконечно малых величин. По крайней мере, без этого обоснования невозможно обосновать математику. Начну с примера, который заинтересует читателя.

Когда я спрашиваю у студентов и школьников-олимпиадников, с которыми занимаюсь много лет, верно ли равенство $0,(9)=1$, *практически всегда отвечают, что нет. Тогда я спрашиваю, как выглядит дробь* $\frac{1}{3}$ *в десятичной записи? Ответ, конечно,* $\frac{1}{3}=0,(3)$. *А если умножим обе части на 3? Тогда вроде верно, но уже возникают сомнения: а верно ли второе равенство? В кольце сходящихся числовых последовательностей* P *разность* $1-0,(9)$ *можно интерпретировать как последовательность* $(0{,}1; 0{,}01; \dots; 0{,}0\dots01; \dots)$, *общий член которой имеет вид* 10^{-n} *при неограниченном увеличении* n. *Но в кольце частных* $S^{-1}P$, *где* S *состоит из сходящихся последовательностей с положительными членами, последовательность* $(0{,}1; 0{,}01; \dots; 0{,}0\dots01; \dots)$ *обратима, в отличие от последовательности, состоящей из одних нулей. То есть уже отличается чем-то. В поле вещественных чисел это (эквивалентное) равенство верно, так как осуществляется предельный переход (как бы перепрыгиваем через бесконечно малую величину вида* $0,(0)1$, *если применить не совсем корректную, но очень красноречивую запись, где* 1 *идет после неограниченного количества нулей). В работе всё это рассмотрено более аккуратно.*

Краткое содержание *последующих* **серий**

Изначально, размышления носили «философско-чувственный» характер: построение всевозможных конструкций, связанных с натуральным рядом, – этим я очень активно занимался около двух лет – и их осмысление с точки зрения законов диалектики (*глава 1*). Пришел к выводу, что натуральный ряд **не может быть конечным**, но и **не может быть бесконечным**. И, задав себе вопрос: каким тогда он является? Практически машинально ответил – промежуточным, и стал это обосновывать диалектически. Переходное состояние между чем-то конечным и бесконечностью как раз соответствует законам диалектики: переход количества в новое качество *(неограниченно накапливаясь, конечное начинает приобретать черты бесконечного)*, отрицание отрицания *(новая конечность отрицает старую и так неограниченное количество раз)*, борьба и единство противоположностей *(неограниченно возрастая, конечное начинает переходить в свою противоположность, то есть стремиться к бесконечности (**борьба**), при этом это стремление возникает из конечного (**единство**))*. И только в 2013 году в ночь на 19-е августа в 3 часа удалось с помощью факторизации кольца сходящихся последовательностей P по идеалу

$$J = \{\{c_n\} | \text{существует } k, \text{такое, что } c_m = 0, \text{при } m > k, c_n \in R, k, m \in N\}$$

в конце концов, интерпретировать понятие «бесконечно малая величина». Последовательности попадают в один класс смежности по идеалу J, если их соответствующие члены равны, за исключением, быть может, конечного числа членов. То есть последовательности эквивалентны, если у них одинаковый «**хвост**» (их эквивалентность не зависит от любого конечного начального отрезка). Это позволяет считать, что «хвост» всегда находится в любой окрестности числа, к которому эти последовательности сходятся (*глава 2*). **Это так здорово!**

Обоснование анализа бесконечно малых величин перешло на алгебраические, а потому верные, рельсы. Дальнейшие рассмотрения лишь подтвердили это.

*Какую длину имеет **точка** на вещественной прямой? Если у неё нет длины, то есть равна нулю, то и точки нет. Трудно себе представить тело, размеры которого равны нулю, а тело есть (практически все проблемы философского обоснования математики вокруг этого и вертятся). И как тогда вещественная прямая состоит из точек? То есть когда точек очень «много», то в совокупности они уже имеют ненулевую длину, хотя каждая из них имеет нулевую длину. Во истину МИР создан из НИЧЕГО!*

В *третьей главе* **точка** определилась нами как ***отрезок неограниченно малой неопределенной длины***, *связанный с итерационными процессами*, которые выражаются числовыми последовательностями, сходящимися к одному и тому же числу, точнее «**хвостами**» этих последовательностей. Числа же интерпретированы (неоднозначно) представителями классов сходящихся последовательностей в кольце P по идеалу J, для которых длина не определяется. Два таких класса определяют одно и то же число, если разность любых представителей этих классов есть последовательность, принадлежащая идеалу I (последовательностей из P, сходящихся к нулю). Теперь прямая может состоять из неограниченного количества точек, у которых неограниченно малая длина. Здесь же удалось доказать «аксиому непрерывности» Дедекинда.

В *главе 4* введены очень важные понятия **аддитивного и мультипликативного подобия и квазиподобия**, позволившие по новому взглянуть на непрерывное дифференцирование функции и линейный дифференциал.

Чтение можно начать с *главы 5* «**Великая потеря математики**», особенно для тех, кто не знаком с теорией колец. Рассуждения, проводимые в этой главе, имеют твердую алгебраическую основу, несмотря на гуманитарный характер – это различие идеалов J и I (смежный класс последовательностей сходящихся к нулю). Основная мысль, которая проводится в этой главе, состоит в том, что в любой последовательности счетно неограниченного характера всегда будут непронумерованные члены. Там приведены интересные конструкции. Например, последовательность $\{n\}$ содержит подпоследовательность вида $\{2^n\}$: $1, \mathbf{2^1}, 3, \mathbf{2^2}, 5, 6, 7, \mathbf{2^3}, \dots, n, \dots \mathbf{2^n}$ … , и при $n \to \infty$ степень двойки стремится к несчетной мощности $2^n \to 2^\infty$. Но с другой стороны числа вида 2^n являются натуральными и находятся в натуральном ряду, то есть получается, что, если актуализировать бесконечность натурального ряда $\{n\}$, то актуализируется внутри ряда и $\{2^n\}$, то есть 2^∞ – также счетно. А как на самом деле? В натуральном ряду нельзя считать, что все числа имеют номера, всегда есть непронумерованный «хвост», что позволяет избежать актуализации, а вместе с ней и противоречия. В частности, с этой же точки зрения подробно рассмотрена конструкция «Отель Гильберта». А та единичка, о которой говорилось выше, в записи $0,(0)1$ и есть Великая потеря, найденная здесь. *Действительно, «хвост» класса последовательностей по идеалу J кольца P, которому принадлежит последовательность $(0{,}1; 0{,}01; \dots; 0{,}0\dots01; \dots)$ не зависит от любого начального отрезка этой последовательности, поэтому неопределенное начало «хвоста» можно записать, как $0,\underbrace{0\dots0}_{n}1; \dots$, где натуральное n ничем не ограничено сверху. И эта 1 была утеряна, так как не имела номера – какой бы номер после запятой не взяли, им пронумерован ноль. Таким образом, начало «хвоста» неограниченно малой последовательности не выражается числовой величиной. Знаменитые слова Пифагора «Всё есть число» должны звучать «Почти всё есть число».*

В *шестой главе* основываясь на введенное понятие **степенного квазиподобия** удалось «растянуть» точку (отрезок неограниченно малой длины) на положительную (без нуля) ось вещественной прямой. Проведена классификация неограниченностей, в основе которой лежит построенная неограниченная цепочка строго вложенных идеалов. Заслуживает внимания арифметика неограниченностей.

Седьмая глава интересна тем, что в ней с точки зрения теории неограниченностей разобраны известные парадоксы: Кавальери, Банаха-Тарского, Зенона Элейского.

В *восьмой главе* представлены некоторые размышления.

Интересно, что город Костанай (в советскую пору чаще назывался **Кустанай**) уже имел успешный опыт в решении одной достаточно старой ***известной проблемы*** со времен появления формул Тартальи-Кардано (XVI век) для поиска корней алгебраического уравнения третьей степени с целыми коэффициентами – это так называемый **неприводимый случай**. Это случай, когда все три корня этого уравнения – вещественные, а их поиск проходил по формулам с использованием дискриминанта с извлечением радикалов из мнимых чисел. Позволю себе сделать вставку из журнала «Квант» №11, 1971 год. [4]

«Неприводимый» случай

В. Г. Янкелевич

Наш читатель семиклассник Миша Балкин спрашивает: «Я увидел в справочнике формулу Кардано для решения кубичного уравнения $x^3+px+q=0$:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}, \qquad \text{где } D=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Но мне кажется, что эту формулу не всегда можно использовать. Например, если мы хотим найти с помощью этой формулы корни уравнения $x^3-x=0$ ($p=-1$, $q=0$), то получим

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Это какие-то мнимые числа, а уравнение имеет три хороших корня: 0, 1 и –1. Как устранить это противоречие?»

Редакция считает, что ответ на этот вопрос будет интересен многим нашим читателям. Мы публикуем статью школьника 10 класса города Кустаная В. Г. Янкелевича, который рассказывает, как можно решать кубичные уравнения в том случае, когда в формуле Кардано получаются отрицательные числа под знаком квадратного корня.

Владимир Григорьевич Янкелевич тогда учился в средней школе №1 города Кустаная с математическим уклоном. Его отец преподавал на кафедре математики в Кустанайском государственном педагогическом институте (КГПИ) имени 50-летия образования СССР (и такие имена бывали). Интересно, что старший брат Владимира Григорьевича, Леонид Григорьевич, работая в КГПИ, также на кафедре математики, вел в средней школе №9 (возле Дворца Профсоюзов), в которой я учился, по четвергам факультатив, на котором рассказывал нам про кратные интегралы (1979-1980 учебный год). Через лет 7, уже после окончания университета и прохождения службы в рядах Советской Армии (1985-1987), я стал работать на этой же кафедре, где всё это мне поведал Леонид Григорьевич.

Глава 1

Счётно неограниченные множества

Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.
Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
Леопольд Кронекер

§ 1.1. Множество натуральных чисел

1.1.1 Определение натурального ряда. Натуральный ряд $1,2,3,\dots n,\dots$ будем считать известным и состоящим из (всех) конечных натуральных чисел расположенных в порядке возрастания (стандартное упорядочение) и определенным рекуррентно: каждый следующий член ряда на единицу больше предыдущего. (Например, можно рассматривать аксиоматику натуральных чисел по Пеано [5]). Изначально оттолкнемся от определений конечного и бесконечного множеств данных в «Алгебре» ван дер Вардена [5]: *множество называется конечным, если его элементы можно занумеровать натуральными числами от* 1 *до* n *так, чтобы различные элементы имели различные номера и чтобы все номера от* 1 *до* n *были использованы. Каждое множество, не являющееся конечным, называется бесконечным.* К определению бесконечного множества мы ещё вернемся.

1.1.2 Столбцово-строчечная конструкция. Будем строить пошагово следующую наивную конструкцию

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
&&&&&&&&&&&&&&& 1 & 2 \\
&&&&&&&&& 1 &&&&& \dots & \dots & \dots \\
&&&&& 1 &&& 1 & 2 &&&& 1 & \dots & n-3 & n-2 \\
&& 1 && 1 & 2 && 1 & 2 & 3 & \dots\;\dots\;\dots && 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 && 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n
\end{array}$$

и т.д.

В итоге получается, что конструкция устремляется к виду:

1)						1
2)					1	2
3)				1	2	3
4)			1	2	3	4
…		…	…	…	…	…
n)	1	2	3	4	…	n

и.т.д.

Здесь строка и столбец для каждого натурального n (n −я строка и n −й столбец) строятся совершенно одинаково – их роли можно менять (транспонировать), при этом ничего не изменится по соображениям симметричности. Таким образом, с каждым натуральным n принадлежащим строке, мы связали столбец, совпадающий с начальным отрезком натурального ряда – получился ряд столбцов. Причем здесь связано все: последний элемент столбца совпадает с номером столбца, который в свою очередь совпадает с количеством элементов в столбце (конечной мощностью столбца, как множества), каждый столбец совпадает со строкой (начальным отрезком натурального ряда) по построению. Еще раз подчеркнем, что в силу построения, транспонировав, можно рассматривать натуральный ряд как столбец, с каждым элементом которого связана строка (начальный отрезок натурального ряда). Это означает, что если существует натуральный ряд – строка, то симметрично существует (в этой же конструкции) натуральный ряд – столбец. Предположим, что последовательность натуральных чисел существует (как множество). Теперь попробуем ответить на вопрос: *каким является натуральный ряд – конечным или бесконечным.* Если натуральный ряд (строка) конечен, то выбрав в нем (как во множестве с обычным линейным порядком) наибольший элемент (наибольшее натуральное число, которое существует в силу предположения конечности ряда), прибавим к нему единицу и увидим, что натуральный ряд, вопреки определению, состоит не из всех конечных натуральных чисел. Если же натуральный ряд (строка) бесконечен, то существует равный (симметричный) ему по построению натуральный ряд – столбец, который состоит из бесконечного числа элементов (мощность которого бесконечна), а мощность столбца и есть его номер (элемент строки), а это значит, что мы получили противоречие с тем, что натуральный ряд (строка) состоит из конечных натуральных чисел. Получается, что натуральный ряд (как множество) не может быть ни конечным, ни бесконечным.

Возникает вопрос: а существует ли натуральный ряд?

§ 1.2. Счетная неограниченность

1.2.1 Определение счётной неограниченности. Что делать в получившейся ситуации? Странно считать, что натурального ряда не существует, когда существует его явное построение, а, с другой стороны, если считать, что существует, то получается противоречие. Неужели математика изначально противоречива? Прежде чем ответить на этот вопрос, давайте вернемся к определению бесконечности: *каждое множество, не являющееся конечным, называется бесконечным*. Возникает вопрос: а когда множество перестает быть конечным (уже не является конечным) и становится бесконечным? Когда наступает этот переход от конечного к бесконечному? В человеческой жизни есть так называемый переходный возраст, когда подросток уже не ребенок (но сохраняет некоторые детские признаки), но еще не взрослый (но в нем уже заложены некоторые свойства взрослых). Медики не могут определить грань между жизнью и смертью, когда считать, что смерть уже наступила? С ростом возможностей медицины взгляд на эту проблему меняется. Переходное состояние между двумя определенностями является неустойчивым, неопределенным, сохраняя признаки предыдущего состояния, но отрицая их и приобретая свойства нового состояния. Здесь ярко проявляются законы диалектики: отрицания отрицания, перехода количества в качество, борьбы и единства противоположностей. Действительно, каждый раз строя следующее натуральное число (новая конечность), отрицается конечность предыдущего (старая конечность), в совокупности начинает «отрицаться» любая конечность, и «приобретаться» черты бесконечности. Когда в натуральном ряду количество конечных чисел неограниченно растет, то в нем начинают проявляться новые качества, присущие бесконечным множествам (переход количества в (новое) качество). В этом переходном состоянии, возникает двойственность (борьба и единство противоположностей): «уже не конечно, но еще не бесконечно» или «еще конечно, но уже и бесконечно» – в этом состоит некая неопределенность (одновременно и то и другое, в то же время и ни то и ни другое). Мы доказали, что натуральный ряд не является конечным и не является бесконечным. Натуральный ряд по определению строится, «убегая» от конечного и, «не достигая» бесконечного. Натуральный ряд, как **переходное состояние** от конечного к бесконечному, будем называть **счетной неограниченностью**. Термин «счетно бесконечное множество» явно указывает на бесконечность множества натуральных чисел и отсутствие переходного состояния. Счетная неограниченность не является потенциальной бесконечностью, так как вопрос о потенциальной бесконечности поднимает вопрос о существовании актуальной бесконечности (противопоставляется актуальной бесконечности, которая является альтернативой потенциальной бесконечности), в то время как счетная неограниченность утверждает (актуальную) бесконечность, будучи переходным состоянием между двумя устойчивыми состояниями: конечным и бесконечным. В определении у ван дер Вардена [5] изначально заложен закон исключенного третьего: *всякое множество либо конечно (элементы индексируемы числами от 1 до n, где n – фиксированное натуральное число), либо бесконечно (элементы не индексируемы числами от 1 до n, где n – фиксированное натуральное число).*

Под индексированием понимаем (как у ван дер Вардена) нумерацию натуральными числами от 1 до n так, чтобы различные элементы имели различные номера и чтобы все номера от 1 до n были использованы.

Поэтому множество натуральных чисел и определили как первое бесконечное множество.

Прежде всего, необходимо будет рассматривать счетно неограниченные последовательности, то есть последовательности, любое конечное подмножество членов которых можно индексировать числами натурального ряда.

Определение 1. Множества, которые нельзя проиндексировать натуральными числами от 1-го до n, где n фиксированное натуральное число, будем называть неограниченными.

Определение 2. Множества, на которых можно задать правило, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и числами натурального ряда, так что у всякого фиксированного элемента множества, согласно заданному правилу появится номер, будем называть счетно неограниченными.

То есть множества можно индексировать, но нельзя считать, что все элементы множества проиндексированы, так как само множество натуральных чисел является неопределенным. Ниже, рассматривая действия ленивого Деда Мороза, мы увидим, что попытка считать неограниченное множество проиндексированным приводит к противоречию.

Единица – это первая математическая модель, которая есть практически у всех народов. Эта модель изначально очень груба. Например, один человек – это может быть и взрослый и новорожденный, нам важно лишь, что каждого из них можно назвать человеком. Абстрагируясь от всего конкретного, имеем просто единицу, как модель, которую можно адекватно применить к чему угодно при определенных условиях и в соответствии с требованиями моделируемого объекта. Основное требование часто заключается в равенстве или одинаковости рассматриваемых объектов. *Но абсолютно одинаковых объектов не существует, поэтому изначально мы определяем лишь эквивалентное равенство чего-либо, различая почти одинаковые объекты только в случае, если того требует проблема.* Если же почти одинаковые объекты можно считать одинаковыми, то все они превращаются в совершенно одинаковые единицы. Фактически речь идет о классификациях и разбиениях, которые в большой мере проявляются в алгебре, – в разного рода факторизациях, когда целые классы элементов рассматриваются как нечто единое. Это объясняет почему «*Мир идет по пути математизации, а математика по пути алгебраизации*».

Похоже, что на самом деле

Бог создал** единицу, **всё остальное — дело рук человека.

Я же, все больше прихожу к мысли, что

*Бог дал нам единицу, а себе оставил бесконечность, все остальное – это **наш путь к Богу.***

Глава 2

Интерпретация понятия «бесконечно малая величина»

§ 2.1 «Идеальная» конструкция точки

2.1.1 Изоморфизм факторкольца P/I и поля вещественных чисел R. Здесь рассматриваются только числовые (состоящие из вещественных чисел) последовательности. Заметим, что *состояние* «неограниченной малости» (бесконечно малой величины, б.м.в.) возникает лишь в последовательностях, так как конечной малой или конечной большой величины без сравнения с масштабом принятой единицы не существует – любую конечную величину можно принять как масштабную единицу. «Малость» величины может возникнуть лишь в сравнении с другими величинами, то есть существует лишь относительная малость. Кроме того, это состояние, а не величина, причём промежуточное между какой бы то ни было конечной ненулевой величиной (какой-либо конечностью, понятием «что-то есть») и нулём (понятием «ничего нет»). Состояние неограниченной малости отчетливо прослеживается в последовательностях сходящихся к нулю. Сразу проведем аналогию между натуральным рядом $1, 2, 3, \dots n, \dots$ и гармоническим $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$. Для любого конечного вещественного числа $x \neq 0$ всегда найдётся такое натуральное число n, что $n > |x|$, поэтому все члены натурального ряда в совокупности определяют промежуточное состояние между чем-либо конечным и бесконечным. Аналогично, для любого конечного вещественного числа $\varepsilon \neq 0$ всегда найдётся такое натуральное число n, что $|\varepsilon| > \frac{1}{n}$ поэтому все члены гармонического ряда в совокупности определяют промежуточное состояние между чем-либо конечным и нулем.

Выделим среди числовых последовательностей фундаментальные. Согласно критерию Коши: всякая сходящаяся числовая последовательность фундаментальна и всякая фундаментальная числовая последовательность сходится, то есть имеет конечный предел. Отчасти в обозначениях и в терминологии будем придерживаться учебника для вузов [6]. Все необходимые понятия, определения и свойства числовых последовательностей можно найти там же. Вкратце здесь приведу только самое нужное.

Пусть имеются сходящиеся последовательности $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ и $\{b_n\} = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, где $n = 1,2,3 \dots$. Далее n специально описывать не будем. Определим почленно сумму и произведение сходящихся последовательностей: $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ и $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$. Определим умножение последовательности на действительное число, как умножение всех его членов на это число. Заметим, что сумма, произведение и умножение на число сходящихся последовательностей, определенных таким образом, будет сходящейся последовательностью. Причем, если последовательности имели пределы соответственно a и b, то сумма последовательностей будет сходиться к числу $a + b$, произведение – к $a \cdot b$, а последовательность, умноженная на действительное число α: $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$ – к $\alpha \cdot a$. Для каждого вещественного a во множестве последовательностей, сходящихся к a, есть последовательность $\{a_n\} = \{a\}$ (все члены последовательности совпадают с пределом этой последовательности), которую называют стационарной. Теперь операцию умножения на действительное число α, можно представлять, при необходимости, как умножение на стационарную последовательность $\{\alpha\}$. Две последовательности называются равными, если их разность есть стационарная последовательность $\{0\}$, если же их разность есть последовательность, сходящаяся к нулю, то будем называть эти последовательности эквивалентно равными. На множестве сходящихся последовательностей определим частичный порядок: $\{a_n\} > \{b_n\} \Leftrightarrow$, когда все члены разности $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$, начиная с некоторого конечного индекса строго больше нуля. Определить на множестве сходящихся последовательностей, какой-либо разумный линейный порядок, согласованный с обычным порядком конечных вещественных чисел, к которым они сходятся, не представляется возможным. Например, две последовательности $\{a_n\}$ и $\left\{a_n + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ имеют разность $\{a_n\} - \left\{a_n + \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{a_n - a_n - \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$, которая не дает возможность говорить, что одна из них больше другой.

Множество всех сходящихся последовательностей с определенными таким образом операциями сложения и умножения, как легко видеть, образует коммутативное ***кольцо*** P, в котором множество всех последовательностей, сходящихся к нулю, образует **идеал** I. В частности, последовательность, состоящая из одних нулей – стационарная последовательность $\{0\}$, также принадлежит этому идеалу и является нейтральным элементом по сложению в кольце P, по умножению нейтральным элементом является стационарная последовательность $\{1\}$.

Основное множество кольца сходящихся последовательностей разбивается на классы эквивалентности, по отношению «сходиться к конечным вещественным числам». Все последовательности, сходящиеся к одному и тому же вещественному числу a, составляют один смежный класс. Операции на классах эквивалентности вводятся стандартно: $(\{a_n\} + I) + (\{b_n\} + I) = \{a_n + b_n\} + I$, $(\{a_n\} + I) \cdot (\{b_n\} + I) = \{a_n \cdot b_n\} + I$. Нетрудно показать корректность введенных таким образом операций на классах эквивалентности кольца сходящихся последовательностей, то есть независимость от выбора представителя класса эквивалентности. Сведения о коммутативных кольцах можно найти в [5] и [7].

Рассмотрим факторкольцо P/I. Нейтральным классом в этом факторкольце по сложению является идеал I, по умножению – класс последовательностей, сходящихся к единице. Действительно, в силу корректности определений суммы и произведения классов, достаточно рассмотреть в качестве представителей этих классов стационарные последовательности $\{0\}$ и $\{1\}$ соответственно: $(\{a_n\} + I) + (\{0\} + I) = \{a_n + 0\} + I = \{a_n\} + I$, $(\{a_n\} + I) \cdot (\{1\} + I) = \{a_n \cdot 1\} + I = \{a_n\} + I$.

Два смежных класса факторкольца P/I называются **взаимно обратными**, если произведение любых двух представителей, взятых по одному из каждого класса, есть последовательность, принадлежащая нейтральному по умножению классу. Покажем, что любой класс, не представляющий ноль – обратим, то есть имеет обратный. Каждому смежному классу последовательностей сходящихся к действительному числу $a \neq 0$, обратным будет смежный класс последовательностей сходящихся к действительному числу $\frac{1}{a}$. Действительно, произведение любых двух последовательностей, взятых по одному из этих классов, будет сходиться к произведению $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Мы доказали, что фактор-кольцо P/I является полем. Если рассмотреть отображение $P/I \to R$, где R – поле вещественных чисел, по правилу: каждому смежному классу последовательностей ставится в соответствие предел, к которому эти последовательности стремятся, то, очевидно, получим изоморфизм. Итак, нами получена

Теорема 1. *Факторкольцо P/I изоморфно полю вещественных чисел.*

Таким образом, этим изоморфизмом ноль (как число или как точка) представляется идеалом I, соответственно всякое вещественное число a – смежным классом $\{a_n\} + I$, где $\{a_n\}$ произвольная сходящаяся к a последовательность. Смежные классы будем обозначать также $[\{a_n\}] = \{a_n\} + I$, или $[a]$.

Определение. *Сходящаяся последовательность называется обратимой, если она принадлежит обратимому смежному классу.*

Следствие из теоремы 1. *Идеал I максимален, кольцо P локально и идеал I содержит все собственные идеалы кольца P.*

Доказательство. Любая последовательность из множества $P \setminus I$ (разность основных множеств кольца P и идеала I) сходится к некоторому $a \neq 0$, а значит, принадлежит обратимому смежному классу, то есть и сама является обратимой. Согласно предложению 1.6 пункт 1 из [7] на странице 13, P локальное кольцо и I его максимальный идеал. А так как всякий идеал, не совпадающий с самим кольцом, содержится в некотором максимальном идеале, получаем, что идеал I содержит все собственные идеалы кольца P.

2.1.2 Математика – это физика, доведенная до абсурда. То, что в физике понимается под неделимой частицей, в математике всегда могут разделить пополам, и так поступать неограниченно, доводя понятие неделимого до абсурда, получая при этом парадоксы. Проиллюстрируем только что сказанное. Возьмем единичный однородный куб. Из каких частиц он бы не состоял, количество частиц будет конечным, так как они имеют, пусть и небольшой, но ненулевой конечный объем. Математики считают, что куб состоит из точек, размеры которых равны нулю. Получается, что у математиков мир как бы создан из ничего. На самом деле, как будет описано ниже, он состоит из неограниченно малых величин, которые не имеют определенности в смысле задания их «малости» и могут неоднозначно (разными способами) задаваться либо сходящимся процессом итерационного характера, либо некоторым правилом или формулой, которые определяют некоторые последовательности. В итоге получается, что не все существующее может задаваться или измеряться конечными числовыми величинами (это, прежде всего, касается непрерывных величин). Если тот же куб разделен на неограниченно большое количество одинаковых частей, то эти части не могут иметь конечный объем. То есть математика как моделирующая субстанция изначально отлична от того, что моделирует. С другой стороны, какой бы размер частиц не был задан (наночастицы, молекулы, атомы), математические модели уже могут быть заданы с любой наперед заданной точностью (меньше, чем у точки размеров быть не может). В этом, в частности, заключается эффективность применения математического аппарата во многих областях, близких или далеких к математике. В физической картине мира макромир и микромир имеют похожие конструкции: солнце и планеты вокруг него с одной стороны, ядро и электроны с другой. Теперь и в математике точка (микромир) представляет собой богатый мир сходящихся последовательностей, разнообразие которых трудно представить. О макромире речь пойдет ниже.

2.1.3 Залезть в «душу» точки. Нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. *Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной последовательностью, если она удовлетворяет условию: существует конечное вещественное число M, такое что для любого индекса i, выполняется неравенство $|a_i| < M$.*

Все сходящиеся последовательности являются ограниченными.

Определение 2. *Неограниченно большой положительной последовательностью называется последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяющая условию: для всякого конечного вещественного числа M найдется индекс k, такой, что $a_i > M$ при всех $i > k$.*

Определение 3. *Неограниченно большой отрицательной последовательностью называется последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяющая условию: для всякого конечного вещественного числа M найдется индекс k, такой, что $a_i < M$ при всех $i > k$.*

Определение 4. *Неограниченно большой последовательностью называется последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяющая условию: для всякого конечного вещественного числа M найдется индекс k, такой, что $|a_i| > M$ при всех $i > k$.*

Очевидно, что неограниченно большие положительные и отрицательные последовательности являются неограниченно большими последовательностями.

Определение 5. *Последовательность $\{a_n\}$ называется последовательностью, не имеющей предела, если она не является ни сходящейся, ни неограниченно большой последовательностью.*

Среди последовательностей, не имеющих предела, есть последовательности не являющиеся ограниченными, например, $\{a_n\} = \left(1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{4}; \dots\right)$. Неограниченно большая последовательность может иметь два предела, например $(1; -2; 3; -4; \dots)$, но мне «удобней» отделить неограниченно большие последовательности от других последовательностей не имеющих предела.

Для любой сходящейся последовательности $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, построим, используя фиксированное вещественное число $t > 1$, следующую последовательность $\left\{\frac{a_n}{t^n}\right\} = \left(\frac{a_1}{t}, \frac{a_2}{t^2}, \dots, \frac{a_n}{t^n}, \dots\right)$, которая в силу ограниченности исходной последовательности $\{a_n\}$, сходится к нулю и по ней можно однозначно восстановить исходную последовательность, умножив её на неограниченно большую последовательность по тому же определению произведения, что и для сходящихся последовательностей: $\left\{\frac{a_n}{t^n}\right\} \cdot \{t^n\} = \left\{\frac{a_n}{t^n} \cdot t^n\right\} = \{a_n\}$ (здесь степень числа $t > 1$ одновременно является индексом членов последовательности $\{t^n\}$). Таким образом, множество всех сходящихся последовательностей взаимно однозначно отображается во множество всех последовательностей сходящихся к нулю. Это соответствие инъективно, но не сюръективно, так как, например, ограниченная последовательность $\{(-1)^n\}$ не принадлежит кольцу P потому, что не имеет предела, но последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{t^n}\right\}$, где $t > 1$ фиксированное число, принадлежит идеалу I и не имеет прообраза в кольце P при этом отображении. С другой стороны, между основными множествами смежных классов $\{a\}+I$ и I существует естественное взаимно-однозначное соответствие: $\{a\}+\{b_n\} \leftrightarrow \{b_n\}$, где $\{b_n\} \in I$. Таким образом, имеем вложение основного множества I во множество $P \setminus I$. По теореме Кантора – Бернштейна множества $P \setminus I$ и I равномощны.

Не думаю, что основное множество идеала I и основное множество поля вещественных чисел R равномощны. Похоже, что мощность идеала, как множества, больше, чем мощность множества R. Однако мне не удалось доказать или опровергнуть эту гипотезу.

Инъективное вложение основного множества P в основное множество идеала I, означает, что каждая точка a вещественной прямой (математический «атом», неделимая частичка в математике, но имеющая достаточно сложную структуру), представленная смежным классом $\{a\}+I$, в каком-то смысле хранит «генетическую» информацию о всех сходящихся последовательностях. На самом деле, в идеале I, в силу того, что вложение не является сюръективным, заложена информация: о всех ограниченных последовательностях, в том числе сходящихся; некоторой части неограниченно больших; некоторой части не имеющих предела и не являющихся ограниченными. Причем любую последовательность можно «загнать» в идеал I, делением, например, на подходящую неограниченно большую положительную последовательность, не содержащую нулевых членов. Однако, все последовательности в совокупности «загнать» таким вот образом нельзя.

Здесь прослеживаются параллели – в биологии клетка организма хранит информацию о всём организме, что позволяет клонировать живые существа, с тем же набором генов. Даже более, хранит информацию всей эволюции этого организма.

Ниже увидим, как проявляется «фрактальность» нашей конструкции, присущая многим процессам, как в живой, так и в неживой природе.

§ 2.2 Кольца частных

2.2.1 Кольцо частных кольца P. Кольцо P не является областью целостности, так как содержит ненулевые делители нуля. Например, две последовательности из класса, представляющего нуль: $(0, a_2, 0\ a_4, \dots ,0, a_{2k}, 0, a_{2k+2}, \dots)$ и $(b_1, 0, b_3, 0, \dots , b_{2k+1}, 0, b_{2k+3}, 0, \dots)$, в произведении дают последовательность $(0,0,0,0, \dots, 0,0,0,0, \dots)$. У одной последовательности на нечетных местах стоят нули, у другой – на четных, на остальных местах у каждой последовательности есть хотя бы один отличный от нуля член.

Рассмотрим в кольце P мультипликативный моноид S всех последовательностей без нулевых членов (см. [7]). Определим отношение $\equiv$ на множестве пар прямого произведения $P \times S$ следующим способом: $(\{a_n\}, \{s_n\}) \equiv (\{b_n\}, \{t_n\}) \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n\} \cdot \{t_n\} - \{b_n\} \cdot \{s_n\} = \{a_n t_n - b_n s_n\} = \{0\}$. Оно, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначим через ${\{a_n\}}/{\{s_n\}}$ класс эквивалентности пары $(\{a_n\}, \{s_n\})$ и пусть $S^{-1}P$ множество всех классов эквивалентности. Введем на $S^{-1}P$ структуру кольца, определив сложение и умножение «дробей» ${\{a_n\}}/{\{s_n\}}$ формулами:

$$
{\{a_n\}}/{\{s_n\}} + {\{b_n\}}/{\{t_n\}} = {\{a_n t_n + b_n s_n\}}/{\{s_n t_n\}},
$$

$$
{\{a_n\}}/{\{s_n\}} \cdot {\{b_n\}}/{\{t_n\}} = {\{a_n b_n\}}/{\{s_n t_n\}}.
$$

Легко проверить, что эти определения корректны и что $S^{-1}P$ является коммутативным кольцом с единицей. Это кольцо называется *кольцом частных* кольца P относительно S.

Смежные классы этого кольца могут быть представлены (в некотором расширении кольца P) неограниченно большими последовательностями, не принадлежащими P, например, если для представителя класса в качестве «числителя» взять стационарную последовательность $\{1\}$, а в качестве «знаменателя» гармонический ряд $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (они принадлежат P), то получим, что ${\{1\}}/{\left\{\frac{1}{n}\right\}} = {\{n\}}/{\{1\}}$, где натуральный ряд $\{n\}$ является неограниченно большой последовательностью. А если в качестве «числителя» взять $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, а в качестве «знаменателя» взять последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, то получим смежный класс, который может быть представлен последовательностью, не имеющую предела $\{(-1)^n\}$.

Пусть $\bar{P}$ – множество всех последовательностей вещественных чисел (не только сходящихся), оно является кольцом относительно операций покомпонентного сложения и умножения. Кольцо $\bar{P}$ является расширением кольца P. Выделим в $\bar{P}$ мультипликативный моноид S_1, состоящий из одной последовательности: $S_1 = \{1\}$. Аналогично предыдущему, построим кольцо частных $S_1^{-1}\bar{P}$, смежные классы которых, формально представлены дробями ${\{a_n\}}/{\{1\}}$. Кольца $\bar{P}$ и $S_1^{-1}\bar{P}$ изоморфны благодаря биективному соответствию $\{a_n\} \leftrightarrow {\{a_n\}}/{\{1\}}$, которое, очевидно, сохраняет операции.

Теорема 2. *Кольца частных $S_1^{-1}\bar{P}$ и $S^{-1}P$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon S^{-1}P \to S_1^{-1}\bar{P}$ отображение, ставящее в соответствие каждому элементу из $S^{-1}P$ смежный класс из $S_1^{-1}\bar{P}$ по следующему правилу: $\varphi\left({\{a_n\}}/{\{s_n\}}\right) = {\left\{\frac{a_n}{s_n}\right\}}/{\{1\}}$, $a_n \in P$, $s_n \in S$. Оно инъективно, так как из равенства образов – двух смежных классов в $S_1^{-1}\bar{P}$: ${\left\{\frac{a_n}{s_n}\right\}}/{\{1\}} = {\left\{\frac{b_n}{t_n}\right\}}/{\{1\}}$, где, по установленному для отображения φ правилу, $a_n, b_n \in P$, $s_n, t_n \in S$, следует, что $\left\{\frac{a_n}{s_n}\right\} \cdot \{1\} - \left\{\frac{b_n}{t_n}\right\} \cdot \{1\} = \left\{\frac{a_n}{s_n}\right\} - \left\{\frac{b_n}{t_n}\right\} = \frac{\{a_n t_n\} - \{b_n s_n\}}{\{s_n t_n\}} = \frac{\{a_n t_n - b_n s_n\}}{\{s_n t_n\}} = \{0\}$, откуда получаем, что $\{a_n t_n - b_n s_n\} = \{0\}$. Это означает равенство прообразов этих смежных классов в $S^{-1}P$: ${\{a_n\}}/{\{s_n\}} = {\{b_n\}}/{\{t_n\}}$, так как $(\{a_n\}, \{s_n\}) \equiv (\{b_n\}, \{t_n\}) \Leftrightarrow$ $\{a_n\} \cdot \{t_n\} - \{b_n\} \cdot \{s_n\} = \{a_n t_n - b_n s_n\} = \{0\}$.

Для доказательства сюръективности, нам понадобится

Лемма 1. *Для любой последовательности $\{c_n\} \in \bar{P}$ найдется неограниченно большая положительная последовательность, не содержащая нулевых членов $\{h_n\} \in \bar{P}$ такая, что $\frac{\{c_n\}}{\{h_n\}}$ сходится к нулю.*

Доказательство. Для ограниченных последовательностей достаточно рассмотреть $\{h_n\} = \{n\}$. Для неограниченно больших последовательностей достаточно рассмотреть $\{h_n\} = \{(|c_n| + 1)^2\}$. Для последовательностей не имеющих предела и не являющихся ограниченными, достаточно рассмотреть $\{h_n\} = \{(|c_n| + n)^n\}$. Действительно, $\frac{\{c_n\}}{\{h_n\}} = \frac{\{c_n\}}{\{(|c_n|+n)^n\}} = \left\{\frac{c_n}{(|c_n|+n)^n}\right\} = \left\{\frac{sgn(c_n)\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)^n}{(|c_n|+n)^n}\right\} = \left\{sgn(c_n)\left(\frac{\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)}{(|c_n|+n)}\right)^n\right\}$ сходится к нулю, так как $\frac{\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)}{(|c_n|+n)} < 1$. Здесь $\sqrt[n]{|c_n|}$ – принимает положительные вещественные значения.

Теперь, согласно лемме 1, смежный класс из $S_1^{-1}\bar{P}$, благодаря равенствам: ${\{c_n\}}/{\{1\}} = {\frac{\{c_n\}}{\{h_n\}}}\Big/{\frac{\{1\}}{\{h_n\}}} = {\left\{\frac{c_n}{h_n}\right\}}\Big/{\left\{\frac{1}{h_n}\right\}}$, может быть представлен парой последовательностей сходящихся к нулю $\left(\left\{\frac{c_n}{h_n}\right\}, \left\{\frac{1}{h_n}\right\}\right)$, где $\left\{\frac{c_n}{h_n}\right\} \in P$, $\left\{\frac{1}{h_n}\right\} \in S$. Осталось показать, что отображение φ сохраняет операции кольца: сложение

$$\varphi\left({\{a_n\}}/{\{s_n\}} + {\{b_n\}}/{\{t_n\}}\right) = \varphi\left({\{a_nt_n + b_ns_n\}}/{\{s_nt_n\}}\right) =$$

$${\frac{\{a_nt_n+b_ns_n\}}{\{s_nt_n\}}}\Big/{\{1\}} = {\frac{\{a_nt_n\}+\{b_ns_n\}}{\{s_nt_n\}}}\Big/{\{1\}} =$$

$$= {\left(\frac{\{a_nt_n\}}{\{s_nt_n\}} + \frac{\{b_ns_n\}}{\{s_nt_n\}}\right)}\Big/{\{1\}} = {\left(\frac{\{a_n\}}{\{s_n\}} + \frac{\{b_n\}}{\{t_n\}}\right)}\Big/{\{1\}} = {\left\{\frac{a_n}{s_n}\right\}}\Big/{\{1\}} + {\frac{\{b_n\}}{\{t_n\}}}\Big/{\{1\}} =$$

$$\varphi\left({\{a_n\}}/{\{s_n\}}\right) + \varphi\left({\{b_n\}}/{\{t_n\}}\right).$$

Теперь умножение

$$\varphi\left({\{a_n\}}/{\{s_n\}} \cdot {\{b_n\}}/{\{t_n\}}\right) = \varphi\left({\{a_nb_n\}}/{\{s_nt_n\}}\right) = {\left\{\frac{a_nb_n}{s_nt_n}\right\}}\Big/{\{1\}} =$$

$${\left\{\frac{a_n}{s_n}\right\}\left\{\frac{b_n}{t_n}\right\}}\Big/{\{1\}} = {\left\{\frac{a_n}{s_n}\right\}}\Big/{\{1\}} \cdot {\left\{\frac{b_n}{t_n}\right\}}\Big/{\{1\}} = \varphi\left({\{a_n\}}/{\{s_n\}}\right) \cdot \varphi\left({\{b_n\}}/{\{t_n\}}\right).$$

Таким образом, φ – изоморфизм. Что и требовалось доказать.

Идеал I является подкольцом кольца P, поэтому для него существуют аналогичные конструкции кольца частных I. Здесь в качестве S

может выступить мультипликативная полугруппа последовательностей из I без нулевых членов, она не содержит нейтрального по умножению элемента, – обозначим её через S_I. Кольцо частных $S_I^{-1}I$ кольца I относительно S_I строится аналогично.

Теорема 3. *Кольца частных $S^{-1}P$ и $S_I^{-1}I$ изоморфны.*

Доказательство. Покажем сначала, что всякий смежный класс $\{a_n\}/\{s_n\}$ кольца частных $S^{-1}P$ имеющий представителем пару $(\{a_n\},\{s_n\})$, имеет также представителем пару $(\{c_n\},\{d_n\})$, где $\{c_n\}\in I$, а $\{d_n\}\in S_I$. Действительно, для любого представителя $(\{a_n\},\{s_n\})$ смежного класса $\{a_n\}/\{s_n\}$ из $S^{-1}P$ имеем эквивалентную пару $\left(\left\{a_n\cdot\frac{1}{n}\right\},\left\{b_n\cdot\frac{1}{n}\right\}\right)$ того же смежного класса $\{a_n\}/\{s_n\}=\left\{a_n\cdot\frac{1}{n}\right\}/\left\{s_n\cdot\frac{1}{n}\right\}$ из $S_I^{-1}I$, так как $\{a_n\}\cdot\left\{s_n\cdot\frac{1}{n}\right\}-\left\{a_n\cdot\frac{1}{n}\right\}\cdot\{s_n\}=\{0\}$, где $\left\{a_n\cdot\frac{1}{n}\right\}\in I$, $\left\{b_n\cdot\frac{1}{n}\right\}\in S_I$, то есть $(\{a_n\},\{s_n\})\equiv\left(\left\{a_n\cdot\frac{1}{n}\right\},\left\{b_n\cdot\frac{1}{n}\right\}\right)$. Теперь рассмотрим отображение $\varphi: S^{-1}P\to S_I^{-1}I$, ставящее в соответствие каждому смежному классу из $S^{-1}P$ смежный класс из $S_I^{-1}I$ по следующему правилу: $\varphi\left(\{a_n\}/\{s_n\}\right)=\left\{\frac{a_n}{n}\right\}/\left\{\frac{s_n}{n}\right\}$, $a_n\in P$, $s_n\in S$. Отображение φ инъективно, так как из неравенства двух смежных классов в $S^{-1}P$: $\{a_n\}/\{s_n\}\neq\{b_n\}/\{t_n\}$, где $a_n,b_n\in P$, $s_n,t_n\in S$, следует, что $\{a_n\}\cdot\{t_n\}-\{b_n\}\cdot\{s_n\}=\{a_nt_n-b_ns_n\}\neq\{0\}$, откуда получаем, что $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}/\left\{\frac{s_n}{n}\right\}\neq\left\{\frac{b_n}{n}\right\}/\left\{\frac{t_n}{n}\right\}$, так как $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}\left\{\frac{t_n}{n}\right\}-\left\{\frac{b_n}{n}\right\}\left\{\frac{s_n}{n}\right\}=\frac{\{a_nt_n-b_ns_n\}}{\{n^2\}}=\left\{\frac{a_nt_n-b_ns_n}{n^2}\right\}\neq\{0\}$. Сюръективность отображения φ следует из того, что произвольный смежный класс $\{c_n\}/\{d_n\}$

кольца частных $S_I^{-1}I$ имеющий представителем пару $(\{c_n\},\{d_n\})$, где $\{c_n\} \in I$, $\{d_n\} \in S_I$ является также смежным классом в $S^{-1}P$, так как $I \subset P$, а $S_I \subset S$. Несложно проверить, что отображение φ сохраняет операции кольца. Что и требовалось доказать.

Примечание: Здесь в качестве $\left.\left\{a_n \cdot \frac{1}{n}\right\}\middle/\left\{s_n \cdot \frac{1}{n}\right\}\right.$ из $S_I^{-1}I$ можно было рассматривать «дроби» $\left.\left\{a_n \cdot \frac{1}{t^n}\right\}\middle/\left\{s_n \cdot \frac{1}{t^n}\right\}\right.$ ($t > 1$ фиксированное вещественное число), построенные выше.

По транзитивности *кольца частных* $S_1^{-1}\bar{P}$ *и* $S_I^{-1}I$ *также изоморфны.*

Теоремы имеют простой, но глубокий смысл: *любая последовательность из* $\bar{P}$ *может быть представлена в виде отношения последовательностей из идеала* I, *то есть в виде отношения последовательностей, сходящихся к нулю.* В частности, любая сходящаяся последовательность, может быть представлена таким образом. То есть отношение величин (представленных сходящимися последовательностями), в каком-то смысле, не зависит от значений этих величин (так как могут быть представлены отношением последовательностей, сходящихся к нулю). Это к вопросу об отношениях исчезающих величин ([8], с.171).

В идеале содержится неограниченно маленькая копия «больших отношений», – такая вот фрактальность.

2.2.2 Интерпретация понятия «бесконечно малая величина». Числовые последовательности, предел которых равен нулю, Кудрявцев Л.Д. называет бесконечно малыми последовательностями (см. [6], с.77), сюда он относит и последовательности, имеющие нулевые члены, в частности, и стационарную последовательность, состоящую из одних нулей. О термине «бесконечно малая» Хинчин А.Я. написал [9], что «его следовало бы заменить термином *безгранично убывающая* или другим аналогичным». И хотя Хинчин А.Я. не имеет ввиду последовательности, термин *безгранично убывающая*, а лучше, *неограниченно убывающая*, более точно отражает суть этого понятия и для последовательностей. Но так как неограниченно убывать можно не только до нуля, то *ниже описанные* последовательности, а точнее «хвосты» классов последовательностей, интерпретирующие понятие «бесконечно малая величина», будем называть ***«хвосты» классов неограниченно малых последовательностей (из U_J)***.

В кольце P рассмотрим идеал J, состоящий из всех последовательностей, в которых содержится лишь конечное число ненулевых членов. Это означает, что каждая последовательность из этого идеала, начиная с некоторого натурального индекса (для каждой последовательности свой индекс), состоит из членов равных нулю:

$$J = \{\{c_n\} | \text{существует } k, \text{такое, что } c_m = 0, \text{при } m > k, c_n \in R, k, m \in N\}.$$

По следствию из теоремы 1, идеал J содержится в идеале I. Стандартно строим факторкольцо кольца P по идеалу J, индуцируя операции из кольца P на смежные классы. Факторкольцо $P/J = P_J$ состоит из смежных классов, таких, что разность между двумя последовательностями из одного класса принадлежит идеалу J. Другими словами, две последовательности из одного смежного класса отличаются лишь конечным числом членов или, грубо говоря, имеют одинаковый «**хвост**». Элементами факторкольца P_J являются классы $\{a_n\} + J$. Кроме того, заметим, что в каждом смежном классе $\{a_n\} + J$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность $\{b_n\}$, что если последовательности из $\{a_n\} + J$ сходятся к a, то $|b_n - a| < \varepsilon$ для всех $n = 1,2,3, \dots$. Другими словами, можно считать, что элементы из факторкольца P_J находятся «внутри» любой наперед заданной окрестности соответствующего числа.

Теперь, используя стандартный изоморфизм (см. [10], с. 148, теорема 5) $R \cong P/I \cong {}^{(P/J)}\!\big/_{(I/J)} = P_J/I_J$, где $I_J = I/J$ (напомним, что $J \subset I$) мы можем «копаться» внутри идеалов, рассматривая соответствующие классы, представляющие точки вещественной прямой. Элементами факторкольца P_J/I_J являются классы $(\{a_n\} + J) + I_J$. Каждая сходящаяся последовательность из P попадает в один из этих смежных классов, как по идеалу J, так и по идеалу I_J.

Лемма 1. *Если последовательность $\{a_n\}$ из P сходится к числу $a > 0$, то эта последовательность содержит лишь конечное число нулевых и отрицательных членов. И, наоборот, если последовательность содержит лишь конечное число нулевых и отрицательных членов, и, кроме того, сходится, то к неотрицательному числу.*

Доказательство. Если бы это было не так, то последовательность содержала бы неограниченное число неположительных членов, а значит и подпоследовательность состоящую из неположительных членов, которая не может сходиться к $a > 0$, а значит, и последовательность не может сходиться к $a > 0$. Противоречие. Наоборот, если последовательность содержит лишь конечное число нулевых и отрицательных членов, то начиная с некоторого конечного индекса все ее члены положительны, откуда, в силу того, что последовательность по условию является сходящейся, следует справедливость утверждения.

Ситуация симметрична для последовательностей сходящихся к отрицательному числу.

Будем находиться в факторкольце P_J/I_J, рассматривая $\{a_n\} + J$ – смежные классы последовательностей по идеалу J, как **выделенные** представители (элементы) тех или иных смежных классов по идеалу I_J, то есть $(\{a_n\} + J) + I_J$. Выделим множество S_J всех смежных классов последовательностей по идеалу J, представители которых, содержат конечное число неположительных членов, оно мультипликативно замкнуто. Само множество представителей – множество сходящихся последовательностей, содержащих лишь конечное число неположительных членов обозначим через S_+. По лемме 1, в смежных классах множества S_J содержатся все последовательности сходящиеся к положительным числам. Кроме них, в смежных классах S_J содержатся все последовательности, которые сходятся к нулю (представители из факторидеала $I_J = I/J$) и имеют лишь конечное число неположительных членов. Других последовательностей в смежных классах множества S_J нет. Обозначим множество всех последовательностей, которые сходятся к нулю и имеют лишь конечное число неположительных членов через U $(U \subset S_+)$. Множество смежных классов по идеалу J, которым принадлежат последовательности из U обозначим через U_J. Заметим, что каждое из множеств U и U_J, аддитивно и мультипликативно замкнуты. Более того, являются аддитивными и мультипликативными полугруппами, а относительно обеих операций полукольцами.

Определение. *Полукольцом называется аддитивная полугруппа, замкнутая по умножению, для которой справедливы законы дистрибутивности.*

Элементы из U_J идеала I_J при необходимости будем выделять формальной записью из множества $U_J + I_J$, то есть запись $(\{a_n\} + J) + I_J \in U_J + I_J$, означает, что $\{a_n\} + J \in U_J$, которое возможно только в случае, когда $\{a_n\} \in U$. Это удобно и позволит в дальнейшем сохранить единство записи, при определении частичной операции деления на элементы из U_J.

Для каждой последовательности $\{\propto_n\}$ из U, являющейся представителем смежного класса по идеалу J в идеале I_J, в том же смежном классе (по идеалу J), которому она принадлежит, найдется последовательность $\{\widetilde{\propto_n}\}$, которая состоит только из положительных членов (но «хвосты» у них одинаковы). Например, если все неположительные члены последовательности $\{\propto_n\}$ заменить на любые положительные, (положим, на число 1). Вообще, любой конечный начальный «кусок» можно заменить на нужные нам члены, и мы все равно останемся в смежном классе $\{\propto_n\} + J$. Множество таких последовательностей с положительными членами $\{\widetilde{\propto_n}\}$, обозначим через $\widetilde{U}$. Аналогично, для последовательностей $\{s_n\}$ из $S_+ \setminus U$ (теоретико-множественная разность), обозначим через $\widetilde{S_+ \setminus U}$ множество последовательностей $\{\widetilde{s_n}\}$, состоящих только из положительных членов. Каждая из них принадлежит какому-то смежному классу из $S_J \setminus U_J$.

Теперь можно определить частичную операцию деления в факторкольце P_J/I_J на элементы из мультипликативного моноида S_J. Рассмотрим два случая:

1. Если $\{a_n\} \in P$, $\{s_n\} \in S_+ \setminus U$, $\{\widetilde{s_n}\} \in \widetilde{S_+ \setminus U}$, то
$$\frac{(\{a_n\}+J)+I_J}{(\{s_n\}+J)+I_J} = \left(\frac{\{a_n\}+J}{\{s_n\}+J}\right) + I_J = \left(\frac{\{a_n\}}{\{\widetilde{s_n}\}} + J\right) + I_J = \left(\left\{\frac{a_n}{\widetilde{s_n}}\right\} + J\right) + I_J;$$
2. Если $\{a_n\} \in P$, $\{\propto_n\} \in U$, $\{\widetilde{\propto_n}\} \in \widetilde{U}$, то
$$\frac{(\{a_n\}+J)+I_J}{(\{\propto_n\}+J)+I_J} = \left(\frac{\{a_n\}+J}{\{\propto_n\}+J}\right) + I_J = \left(\frac{\{a_n\}}{\{\widetilde{\propto_n}\}} + J\right) + I_J = \left(\left\{\frac{a_n}{\widetilde{\propto_n}}\right\} + J\right) + I_J.$$

В последовательности $\left\{\frac{a_n}{\widetilde{\propto_n}}\right\}$ нас на самом деле интересует лишь отношение в «хвосте», и то, является ли она сходящейся. ***Деление определено лишь в том случае, когда в результате такого деления получаем сходящуюся последовательность.*** Очевидно, чтобы в результате деления получить сходящуюся последовательность во втором случае необходимо, но недостаточно, чтобы $\{a_n\} \in I$ или $(\{a_n\} + J) \in I_J$. В первом случае операция деления определена для всех $\{a_n\} \in P$ и для всех $\{s_n\} \in S_+ \setminus U$.

На самом деле, частичная операция деления проводится не в кольце P_J/I_J, так как тогда эту операцию мы должны были бы определить на смежных классах из P_J/I_J. В первом случае она, действительно, определена на классах – деление не зависит от выбора представителя из соответствующих классов, то есть определено корректно. А вот во втором случае, частичное деление определено лишь на элементы из U_J кольца P_J (а это лишь часть идеала I_J, то есть часть смежного класса), и только потом уже определяется в каком смежном классе по идеалу I_J факторкольца P_J/I_J оказался (если оказался) результат этого деления. Результат деления во втором случае для $\{a_n\} \in I$ полностью зависит от выбора представителей из U_J, поэтому не может быть определен для всего смежного класса I_J, хотя бы, потому, что не может быть определен для последовательностей с неограниченным числом нулевых членов.

Комментарий. В силу вышесказанного, на самом деле, выражение $\frac{(\{a_n\}+J)+I_J}{(\{\propto_n\}+J)+I_J}$ выглядит несколько странным, в силу того, что $(\{\propto_n\} + J) \in I_J$ и, поэтому получается, что $(\{\propto_n\} + J) + I_J = I_J$, если подходить аддитивно. Но, исходя из равенств $kI_J = I_J$, при любых конечных вещественных $k \neq 0$, получается, что как бы «отношение» $\frac{I_J}{I_J} = k$ означает неопределенность (может равняться любому, отличному от нуля, конечному вещественному числу). В математическом анализе эта неопределенность (правда, предполагается, что k может быть и бесконечным) называется неопределенностью ноль на ноль и обозначается $\left(\frac{0}{0}\right)$. Получается, что, если мы имеем выделенные в I_J представители, то это отношение может стать вполне определенным (сравните теоремы 2 и 3). Можно было бы рассмотреть лишь отношение представителей $\frac{(\{a_n\}+J)}{(\{\propto_n\}+J)}$ (иногда так и будем рассматривать), но хотелось (как бы) все время оставаться в факторкольце P_J/I_J, изоморфном полю вещественных чисел, поэтому была использована формальная приписка $+I_J$, не меняющая сути, но дающая нам такую (эфемерную) возможность, к тому же сохраняющая единство записей в первом и во втором случаях. **Хотя именно это вводило в заблуждение, что, находя пределы при $\Delta x \to 0$ в знаменателе, мы думали, что все время находимся в поле вещественных чисел.**

Нам удобно находиться в кольце P_J, разбитом на смежные классы, по идеалу I_J, работая со смежными классами по идеалу J (элементами кольца P_J), чтобы следить за тем, где (в каком классе) окажется результат операций уже в факторкольце P_J/I_J. При этом представители $\{\propto_n\}+J$ из U_J идеала I_J, которые мы назвали ***выделенными*** и, которые формально обозначены $\{\overline{\propto}_n\}+I_J = (\{\propto_n\}+J)+I_J \in U_J + I_J$, интерпретируют то, что называют бесконечно малыми величинами.

Напомним, что для каждого выделенного элемента $\{\propto_n\}+J$ из U_J, и для любого вещественного $\varepsilon > 0$, найдется последовательность $\{\beta_n\} \in \widetilde{U}$ такая, что выполняется неравенство $\beta_n < \varepsilon$, при всех $n = 1,2,3, \dots$. Действительно, для любого вещественного $\varepsilon > 0$ и произвольного выделенного элемента $\{\propto_n\}+J$, найдется индекс k, такой, что $\propto_m < \varepsilon$, при $m > k$. Заменив в последовательности $\{\propto_n\}$, первые k членов на положительные вещественные, меньшие ε, получим искомую последовательность $\{\beta_n\} \in \widetilde{U}$.

Проведем теперь аналогии с бесконечно малыми величинами:

Положительные бесконечно малые величины	**элементы из U_J («хвосты» классов неограниченно малых последовательностей по идеалу J)**
Положительные величины, меньше любой конечной положительной величины	Каждый смежный класс из U_J представлен последовательностями $\{\propto_n\} \in U$, которые имеют положительный «хвост». Таким образом, каково бы ни было маленьким вещественное число $\varepsilon > 0$, любая последовательность, сходящаяся к ε, будет больше любой последовательности из U, так как их разность будет сходиться к ε (в соответствии с введенным выше частичным порядком для сходящихся последовательностей).
Сумма конечного числа бесконечно малых величин – бесконечно малая величина	аддитивная замкнутость U_J: если $\{\beta_n\}, \{\propto_n\} \in U$, то $\left((\{\beta_n\}+J)+I_J\right)+\left((\{\propto_n\}+J)+I_J\right) = \left((\{\beta_n\}+J)+(\{\propto_n\}+J)\right)+I_J = (\{\beta_n\}+\{\propto_n\}+J)+I_J = (\{\beta_n+\propto_n\}+J)+I_J \in U_J+I_J$, так как $\{\beta_n+\propto_n\} \in U$
Произведение положительного	Произведение любой последовательности сходящейся к положительному числу, на последователь-

конечного числа на бесконечно малую величину – бесконечно малая величина	ность из U принадлежит U, а значит, одному из смежных классов из $U_J \subset I_J$: если $\{a_n\} \in S_+ \setminus U$, $\{\propto_n\} \in U$, то $\left((\{a_n\}+J)+I_J\right) \cdot \left((\{\propto_n\}+J)+I_J\right) = \left((\{a_n\}+J) \cdot (\{\propto_n\}+J)\right) + I_J = (\{a_n\} \cdot \{\propto_n\}+J)+I_J = (\{a_n \propto_n\}+J)+I_J \in U_J + I_J$, так как $\{a_n \propto_n\} \in U$
Сумма конечного числа и бесконечно малой величины равна этому конечному числу	Сумма любой сходящейся последовательности $\{a_n\}$ и любой последовательности сходящейся к нулю, в том числе и из U, сходится к тому же числу, что и $\{a_n\}$: $\{a_n\}+\{\propto_n\} = \{a_n + \propto_n\} \approx \{a_n\}$ (то есть $\{a_n\}$ и $\{a_n\}+\{\propto_n\}$ принадлежат одному классу). Таким образом, для любого элемента $(\{a_n\}+J)+I_J \in P_J/I_J$ и любого элемента $(\{\propto_n\}+J)+I_J \in U_J + I_J$ получаем щее: $\left((\{a_n\}+J)+I_J\right) + \left((\{\propto_n\}+J)+I_J\right) == \left((\{a_n\}+J)+(\{\propto_n\}+J)\right)+I_J = \left((\{a_n\}+\{\propto_n\})+J\right)+I_J = (\{a_n + \propto_n\}+J)+I_J = (\{a_n\}+J)+I_J$
Произведение бесконечно малых величин – бесконечно малая величина	Мультипликативная замкнутость U_J: если $\{\beta_n\}, \{\propto_n\} \in U$, то $\left((\{\beta_n\}+J)+I_J\right) \cdot \left((\{\propto_n\}+J)+I_J\right) = \left((\{\beta_n\}+J) \cdot (\{\propto_n\}+J)\right)+I_J = (\{\beta_n\} \cdot \{\propto_n\}+J)+I_J = (\{\beta_n \propto_n\}+J)+I_J \in U_J + I_J$, так как $\{\beta_n \propto_n\} \in U$

Комментарий. Можно было разделить понятие «бесконечно малой величины» на «аддитивные бесконечно малые величины» (вместе с нулем) и «мультипликативные бесконечно малые величины» (без нуля, на которые можно частично делить, чтобы получать в результате в пределе конечные значения). Далее, интерпретировать «аддитивные бесконечно малые величины» как «хвосты» неограниченно малых последовательностей, допуская неограниченное количество (кроме положительных) нулевых и отрицательных членов. А «мультипликативные бесконечно малые величины», как «хвосты» неограниченно малых последовательностей с конечным числом нулевых членов. «Мультипликативные бесконечно малые величины» являются «аддитивными бесконечно малыми величинами», обратно нет. То же верно и для интерпретаций. «Хвосты» неограниченно малых последовательностей («аддитивные бесконечно малые величины») замкнуты по сложению и умножению, а хвосты» неограниченно малых последовательностей с конечным числом нулевых членов («мультипликативные бесконечно малые величины») только по умножению. Элементы же из U_J («хвосты» классов неограниченно малых последовательностей по идеалу J) образуют, как уже отмечалось, полукольцо относительно сложения и умножения. Поэтому такому изложению было отдано предпочтение.

Смежные классы по идеалу J определяются «хвостами», то есть с точностью до произвольных значений любого начального отрезка последовательностей, которые нивелируются факторизацией по идеалу J. Причем заметим, что последовательности $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ и $\{a_{k+n}\} = (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n}, \dots)$, k –фиксированное натуральное число, если они не стабилизирующиеся, относятся к разным смежным классам, так как у них разные «хвосты». То есть, заменяя члены начального отрезка последовательностей, согласно факторизации по идеалу J, чтобы остаться в том же смежном классе, необходимо не изменять количество заменяемых членов (тем самым, не изменять индексацию сдвигами). Сколько было членов в начальном отрезке, столько должно и остаться. Индексация «хвоста» остается неизменной.

Для большей наглядности рассмотрим один из смежных классов из U_J по идеалу J, например, $\left\{\frac{1}{n}\right\} + J$. Он состоит из последовательностей вида

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$a_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$a_1, a_2, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$a_1, a_2, a_3, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$\dots, \dots, \dots;$$
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$\dots, \dots, \dots,$$

где $a_i, i = 1,2,3, \dots$ – произвольные вещественные числа. В частности, этот смежный класс содержит последовательности:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$0,0, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$0,0,0, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots;$$
$$\dots, \dots, \dots;$$

$$0,0,0, \dots ,0, \frac{1}{n+1}, \dots ;$$

$$\dots, \dots, \dots,$$

Каждая из этих последовательностей содержит конечное число нулей, подряд идущих с самого начала, однако в совокупности, для любого конечного индекса, найдется неограниченное число последовательностей, имеющих бóльшее число нулей в начальной части. Таким образом, для данной совокупности и в целом для смежного класса, «хвост» начинается с неопределенного индекса или лучше сказать, что «хвост» не имеет начала, но он (ненулевой «хвост») существует, так как построенный идеал J, отличен от идеала I, а рассматриваемый смежный класс по идеалу J не содержит стационарной (или стабилизирующейся) последовательности, состоящей из одних нулей (их разность не принадлежит идеалу J). Идеал I кольца P сходящихся последовательностей не является идеалом в расширении $\bar{P}$ кольца P, в отличие от идеала J, который является идеалом и в P и в $\bar{P}$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$, неограниченное число последовательностей этой совокупности, а значит, и этого смежного класса, состоят из членов, меньших ε, то есть можно считать, что члены «хвоста», заведомо меньше любого положительного числа. Такая вот, **неограниченная конечность** нулей. В итоге, диалектический переход количества в новое качество, здесь реализован идеально (то есть с помощью идеалов): с одной стороны, все последовательности совокупности отличны от стационарной (или стабилизирующейся) нулевой, с другой стороны неограниченно, в совокупности, близки к ней, так как содержат неограниченное в совокупности, но каждый раз конечное число нулей в начальной части. Это переходное состояние между конечными состояниями, поэтому оно носит неопределенный характер («хвост» не имеет определенного начала). Да и конца «хвост» тоже не имеет. Как это похоже на то, что у всего сущего нет ни начала, ни конца. Между любыми двумя вещественными числами всегда есть вещественные числа, нет соседних вещественных чисел. Как же тогда осуществляется непрерывная связь между ними? Она осуществляется как раз за границей того, что может быть выражено числовыми величинами. От числовых величин требуют однозначности, а на самом деле в соответствие с изоморфизмом поля вещественных чисел R и факторкольца P_J/I_J, они определяются на вещественной прямой с точностью до неограниченно малых последовательностей. *Это потому, что вместо каждого смежного класса (при естественном гомоморфизме), берется* ***только один представи-***

тель *из того же смежного класса, а их неограниченно много и они отличаются друг от друга в некотором расширении кольца P, например, в $\overline{P}$.* Пока рассматриваются сумма или произведение конечного числа слагаемых или сомножителей, то мы остаемся в границах неограниченно малой ошибки. Но когда число участвующих в операции неограниченно, то можем иметь второй замечательный предел: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, хотя $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, а единица в любой степени равна единице. При этом $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1$, где k – фиксированное натуральное число.

Теперь понятно, почему «приращения», дифференциалы аддитивно ведут себя как нули (пренебрежительно малы) – последовательности из U, из которых состоят смежные классы из U_J кольца P_J, интерпретирующие понятие «бесконечно малая величина», при прибавлении к любой сходящейся последовательности, представляющую некоторое число, ***оставляют эту последовательность в том же классе*** (хотя саму последовательность меняют), а значит, их сумма представляет то же самое число. Более того, теперь понятно, что такое приращение – это небольшое «*возмущение*» с помощью элементов из U_J ***внутри точки***, представленной смежным классом сходящихся последовательностей. Кроме того, в кольце P_J, определено (частичная операция) деление на элементы из множества U_J, смежные классы последовательностей которого, являясь частью идеала I_J (в факторкольце P_J/I_J), представляют число ноль. То есть в идеале I_J, представляющем число ноль при данном изоморфизме, есть элементы, которые аддитивно ведут себя как нейтральные элементы (нули), а мультипликативно – как элементы, на которые, в отдельных случаях, можно делить (то есть для них определена частичная операция деления в фактор-кольце P_J, а результат попадает в один из классов факторкольца P_J/I_J). В частности, в кольце частных $S_J^{-1}P_J$, так как $U_J \in S_J$, обратимы. С дифференциалами, интерпретированными в виде «хвостов» классов неограниченно малых последовательностей из U_J можно обращаться как с обычными числами. При этом никакой актуализации нет. Актуализация бесконечно малых величин, вокруг которой (так или иначе) проходила дискуссия студента Н.Н. Лузина и профессора Б.К. Млодзеевского приводит к противоречиям. (см. [11], с.120-121)

Для наглядности приведем простой пример. Рассмотрим Z_5 – поле вычетов по модулю 5. Оно состоит из пяти классов $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Класс $\overline{0}$ представляют целые числа, кратные пяти: $5n$, где n пробегает целые числа. Класс $\overline{0}$ является идеалом в кольце целых чисел. Выделим в нем элемент $5 + \overline{0}$ и разделим на него (считая, что частичную операцию деления мы уже ввели, аналогично той, которую мы рассмотрели для последовательностей) такой же класс с выделенным элементом $15 + \overline{0}$: $\frac{15+\overline{0}}{5+\overline{0}} + \overline{0} = \frac{15}{5} + \overline{0} = 3 + \overline{0} = \overline{3}$. Ясно, что деление не может проходить в поле Z_5, оно проходит в кольце целых чисел Z, мы лишь следим за тем, в каком классе поля Z_5 окажется результат деления после факторизации. Здесь также деление является частичной операцией – на класс $0 + \overline{0}$ с выделенным элементом 0, делить нельзя. Или, если будем делить, например, $\frac{15+\overline{0}}{20+\overline{0}} + \overline{0} = \frac{15}{20} + \overline{0} = \frac{3}{4} + \overline{0}$, то деление осуществляется в поле Q, а результат формально не принадлежит полю Z_5, хотя можно определить, что $\frac{3}{4} \equiv 2\ (mod\ 5)$, учитывая, что $4 \cdot 4 \equiv 1\ (mod\ 5)$.

Таким образом, получена интерпретация понятия «бесконечно малая величина», представленная элементами множества U_J («хвостами» неограниченно малых последовательностей) при соответствующем изоморфизме. Математический анализ, построенный на понятии бесконечно малых, получил свое полное обоснование. Слова из книги Куранта Р., Роббинса Г. «Что такое математика?» ([12], с. 463) о том, что « *… «дифференциалы» в качестве бесконечно малых величин из математического обихода изгнаны теперь окончательно, и не без позора …*», потеряли свою актуальность. Более чем трехсотлетняя эпопея, связанная с обоснованием понятия бесконечно малой величины, завершена.

Поздравляю, УРААААА, товарищи!!!

Ай да, Берик!, Ай да «Кукин» сын!

Глава 3
Сходящиеся числовые последовательности и точки вещественной прямой

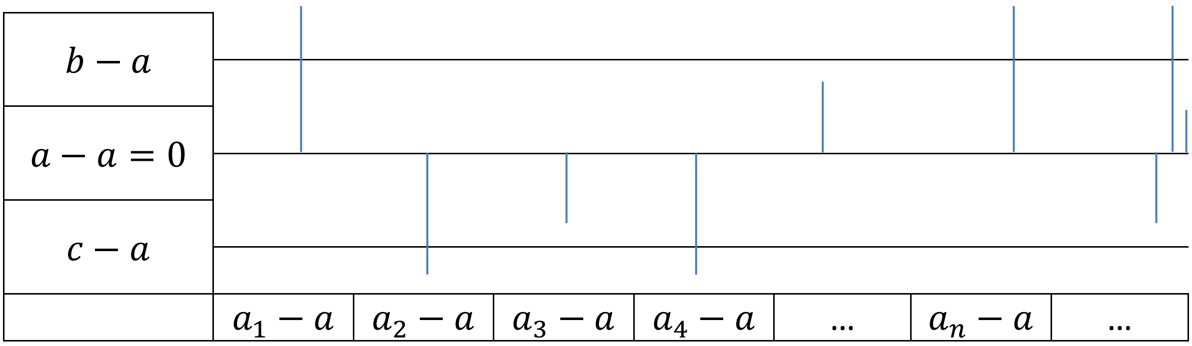
§ 3.1 Сходящиеся последовательности и сходящиеся итерационные процессы

3.1.1 Сходящиеся последовательности, как сходящиеся итерационные процессы. До этого мы пользовались определением сходимости последовательностей из [6]. Дадим эквивалентное определение. Рассмотрим последовательности, членами которой являются вещественные числа. Далее будем называть их просто последовательностями, и обозначать, как и прежде: $\{a_n\}$, где $n = 1,2,3 \ldots$.

Определение. *Последовательность $\{a_n\}$ называется сходящейся к вещественному числу a, если для всякого $b \in R$, $b \neq a$, найдется лишь конечное число членов этой последовательности, удовлетворяющих неравенству: $|a_k - a| \geq |a - b|$.*

В частности, если $a = 0$, то существует лишь конечное число членов a_k этой последовательности таких, что $|a_k| \geq |b|$, при $b \neq 0$.

Только в случае, когда $b = a$ все члены последовательности $\{a_n\}$, а их счетно неограничено, удовлетворяют неравенству $|a_n - a| \geq |a - a| = 0$. Это наглядно видно на рисунке ниже. Пусть $c < a < b$



Лишь конечное число отрезков соответствующих разностям $a_i - a$ пересекут линии соответствующие уровням $b - a$ и $c - a$.

Данное определение позволяет акцентироваться на том, что любое значение, отличное от значения предела, к которому сходится последовательность, можно отделить **за конечное число шагов**, когда как само значение предела может отделяться от других значений в результате **счетно неограниченного процесса**.

Сходящийся итерационный процесс зачастую не дает нам точного значения, к которому сходится, но может определять значения с точностью до любой наперед заданной величины. Например, при поиске приближенных значений корня многочлена большой степени. Сходящиеся последовательности также задают некоторый пошаговый процесс неограниченного приближения (может и совпадающего с искомым значением) к некоторому определенному значению. Таким образом, сходящиеся последовательности можно рассматривать как сходящиеся итерационные процессы. Если процесс задан формульно, то иногда итерационный процесс может дать возможность точно определить значение, к которому этот процесс стремится. Но в общем случае нет. Например, если последовательность $(3; 3{,}1; 3{,}14; \dots)$ всякий раз совпадает с начальной частью десятичной записи числа π (но не задавалась так изначально), то мы не можем утверждать, что эта последовательность сходится к числу π ни на каком шаге. Любая сходящаяся последовательность, рассматриваемая как сходящийся итерационный процесс, задает «хвост». Разным по скорости сходимости итерационным процессам соответствуют разные «хвосты». Но не всякий сходящийся итерационный процесс позволяет однозначно определить сходящуюся последовательность, если не имеет закономерности, позволяющую, например, формульно определять члены последовательности. Однако, всякий сходящийся итерационный процесс определяет какую-то сходящуюся последовательность из класса всех сходящихся последовательностей определяющих какое-нибудь значение (которое не всегда может быть определено).

3.1.2 Принцип вложенных отрезков. Есть некоторая вариативность в том, как представляют принцип вложенных отрезков. Дадим еще одно представление. Пусть имеется система вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, $a_n \in R, b_n \in R, n = 1,2,3, \dots$, длины которых в совокупности стремятся к нулю (см. [6]). В каждом таком отрезке выберем произвольно значение (c_1 выберем из $[a_1; b_1]$, c_2 из $[a_2; b_2]$ и так далее) и получим последовательность вещественных чисел $\{c_n\} = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$, которая сходится к некоторому значению $c \in [a_1; b_1]$, то есть последовательность является сходящейся. Действительно, так как разность последовательностей $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ и $\{b_n\} = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, составленных из соответствующих концов этих отрезков $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n, \dots)$ сходится к нулю, то эти последовательности принадлежат одному классу, и, соответственно представляют одно и то же значение. А так как $\{a_n\} \leq \{c_n\} \leq \{b_n\}$ для всех $n = 1,2,3, \dots$, то и последовательность $\{c_n\} = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ представляет тот же класс, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. В силу произвольности выбора членов последовательности $\{c_n\}$, в факторкольце $P/I \cong {}^{(P/J)}\big/_{(I/J)} = P_J/I_J$ все последовательности, которые можно построить таким образом, попадают в некоторый смежный класс (то есть в точку), который можно представить как $\{\hat{c}_n\} + I_J$, где $\{\hat{c}_n\}$ одна из этих последовательностей. Однако при всей произвольности выбора членов последовательностей $\{c_n\}$, они не охватывают всего многообразия «хвостов» последовательностей, сходящихся к заданному данной фиксированной системой вложенных отрезков значению. Для данной системы вложенных отрезков, существует, например, последовательность $\{d_n\} = (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$, сходящаяся к заданному данной системой вложенных отрезков значению, каждый член которой, начиная с некоторого, не принадлежит следующему вложенному отрезку. Действительно, рассмотрим последовательность

$$\{c_n'\} = (\underbrace{c_1, \dots, c_1}_{k_1}, \underbrace{c_2, \dots, c_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{c_n, \dots, c_n}_{k_n}, \dots),$$

полученную из последовательности $\{c_n\}$, заданной данной фиксированной системой вложенных отрезков и сходящаяся к некоторому значению $c \in [a_1; b_1]$, кратным повторением членов. Пусть последовательность $\{c_n\}$ не содержит членов равных значению c (такая последовательность существует, например, когда все члены рациональны, а значение c иррационально). Очевидно, что последовательность $\{c'_n\}$ сходится к тому же значению c. Первый член $c_1 \in [a_1; b_1]$ повторяется до тех пор, пока c_2 уже не будет принадлежать какому-то $(k_1 + 1)$-му вложенному отрезку. В свою очередь c_2 будет повторяться до тех пор, пока c_3 уже не будет принадлежать какому-то $(k_1 + k_2 + 1)$-му вложенному отрезку. И так далее, c_i повторяется до тех пор, пока c_{i+1} перестанет принадлежать какому-то $(k_1 + k_2 + \cdots + k_i + 1)$-му вложенному отрезку, последующие, соответственно, тоже. Ни какое из значений не будет повторяться неограниченно, так как исходная последовательность не содержит членов равных значению c. Построенная последовательность не будет определяться данной фиксированной системой вложенных отрезков. А, значит, и класс $\{c'_n\} + J$ не определяется данной системой вложенных отрезков. Однако, в любой последовательности, сходящейся к тому же значению, которое определяется данной системой вложенных отрезков, найдется подпоследовательность, которая будет определяться данной системой вложенных отрезков. Но в то же время, для любой последовательности, сходящейся к некоторому значению из $[a_1; b_1]$, найдется система вложенных отрезков, такая, что $c_i \in [a_i; b_i]$, начиная с некоторого k, то есть при всех $i = k, k + 1, k + 2, \dots$. Таким образом, для данного значения $c \in [a_1; b_1]$ все многообразие систем вложенных отрезков, содержащих значение c определяет все многообразие «хвостов» смежных классов $\{c_n\} + J$, сходящихся к этому значению c.

3.1.3 Точка зрения на точку. Если в предыдущем построении рассматривать последовательности $\{c_n\}$ только с рациональными членами, а значение, к которому будут они сходиться, будет иррациональным, то, очевидно, что ни один из членов не совпадет с иррациональным числом (пределом). В силу, того, что мы определили статус натурального ряда как переходный, даже, считая, что мы можем проделывать неограниченно большое число шагов, мы определяем отрезок неограниченно малой длины с центром в **месте** (значении), которое однозначно определяется всеми последовательностями, сходящимися к этому месту (как итерационными процессами). Другими словами, так как мы не можем **проделать** бесконечное число шагов, а можем лишь **проделывать** неограниченно большое число шагов, то после нескольких шагов (членов последовательности), всегда найдется «более близкое» к иррациональному пределу рациональное число, что означает, что мы имеем дело с отрезками, длины которых уменьшаются в результате таких шагов. Таким образом, **точка** на вещественной прямой – это отрезок неограниченно малой неопределенной длины, которую мы интерпретируем как смежный класс сходящихся последовательностей по идеалу I_J. Между **точками** и **местами** установлено взаимно-однозначное соответствие (теорема 1).

3.1.4 Знать свое место. Поясним вышесказанное. Пусть имеется класс $[a]$ последовательностей сходящихся к a в факторкольце P/I. Если теперь, благодаря теореме 1, точка a представляется классом $[a]$, то стационарную последовательность $\{a\}$ можно интерпретировать как ***значение точки***, ***место точки***, ***центр точки*** или ***ядро точки***. Более обще, абстрагируясь от любого конечного начального отрезка последовательностей, с помощью промежуточной факторизации по идеалу J, перейдем к факторкольцу P_J/I_J (напомним, что $P/I \cong {}^{(P/J)}\big/_{(I/J)} = P_J/I_J$). Последовательности, в которых можно заменить конечное число членов, так чтобы она стала стационарной, назовем **стабилизирующимися**, а стационарное значение – **предельным значением, ядром** или **местом**. Таким образом, всякая сходящаяся последовательность, как сходящийся итерационный процесс, определяет **место** (вещественное число на вещественной прямой), которое представляется **стабилизирующимися последовательностями**, то есть теми, которые начиная с некоторого конечного индекса равны одному и тому же значению. Все стабилизирующиеся последовательности, сходящиеся к одному и тому же значению a, в факторкольце $P_J = P/J$ образуют один смежный класс $(\{a\} + J)$. Так же, как и в главе 2, представители $\{a_n\} + J$, определяющие смежный класс $(\{a_n\} + J) + I_J$ в факторкольце P_J/I_J, будем называть ***выделенными элементами***. Таким образом, **точка**, определяемая **местом** (значением) a, представляется смежным сом $(\{a\} + J) + I_J$ по идеалу I_J в факторкольце P_J/I_J, а само **место** – выделенным элементом – смежным классом $(\{a\} + J)$ последовательностей по идеалу J. Другими словами, смежным классом $(\{a\} + J)$ последовательностей по идеалу J, у которых «хвосты» стационарны, и, котостационарны и, которые в P_J/I_J можно рассматривать, при необходимости, в качестве представителей (выделенных элементов из кольца P_J, которое факторизуется по идеалу I_J), определяющих смежный класс $(\{a_n\}+J)+I_J$ по идеалу I_J, где последовательность $\{a_n\}$ сходится к значению a. Так как в смежном классе $(\{a\}+J)+I_J$, с выделенным элементом $(\{a\}+J)$, интерпретирующем **точку**, кроме этого выделенного элемента, интерпретирующего **место**, есть еще другие выделенные элементы, то интерпретации **точки** и **места** различаются в P_J/I_J, хотя и определяют одно и то же вещественное значение. Точка, как смежный класс по идеалу I_J, определяется совокупностью выделенных элементов, а место – только одним. Исходя из предыдущего, непрерывность **подмножества** вещественной прямой в данном **месте** означает, что это **место** определяет **точку**. То есть, что это место не изолировано ни справа, ни слева. Другими словами, непрерывность **подмножества** вещественной прямой в данном **месте** означает, что точка, определяемая этим местом, является ***внутренней***.

3.1.5 Дискретность – это дискредитированная непрерывность. Исследуя природу непрерывности, мы разбиваем на части непрерывный отрезок или пошагово (дискретно) пытаемся приблизиться к некоторому значению, чтобы понять суть непрерывного движения, когда нет соседней, ближайшей точки и каждое другое место находится пусть и на малом, но конечном, не равном нулю, расстоянии, а это уже дискретность. Так как дискретное никогда не совпадет с непрерывным, (а если бы совпало, то перестало бы быть дискретным и стало бы непрерывным, и пришлось бы изучать непрерывность через непрерывность), то различие между ними, компенсируется неограниченным процессом приближения (но не обязательно достижением). А разность при неограниченном приближении неограниченно уменьшается, стремясь к нулю. А так как процесс неограниченно продолжаем, то получается и разность неограниченно убывает. И это переходное состояние (выраженное постоянным процессом в форме последовательности) от дискретного к непрерывному порождает понятие (не величину), которую и назвали «бесконечно малой величиной».

§ 3.2 Сечение Дедекинда

3.2.1 Сечение Дедекинда. Аксиома непрерывности. Рассмотрим множество K сходящихся последовательностей с рациональными членами:

$K = \{\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid a_n \in Q,\ n = 1,2,3, \dots\}$, где Q – поле рациональных чисел. Множество K вместе с операциями почленного сложения и умножения образуют кольцо, в котором сходящиеся к нулю последовательности образуют идеал I. Факторкольцо K/I является полем и изоморфно полю вещественных чисел R.

Аналогично вышеизложенному, в кольце K рассмотрим идеал J, состоящий из всех последовательностей, в которых лишь конечное число членов отлично от нуля:

$$J = \{\{c_n\} \mid \text{существует } k, \text{такое, что } c_m = 0, \text{при } m > k, c_n \in Q, k, m \in N\}.$$

Соответствующий изоморфизм $K/I \cong {}^{(K/J)}\big/_{(I/J)} = K_J/I_J$, позволяет, как и выше, ввести понятие стабилизирующихся последовательностей. Не все классы содержат стабилизирующиеся последовательности. Классы, содержащие стабилизирующиеся последовательности, назовем **рациональными** или **ядерными**, не содержащие стабилизирующихся последовательностей, – **иррациональными** или **безъядерными**. Введем следующую операцию на последовательностях, в каком-то смысле обратную к выделению подпоследовательностей в последовательностях.

Определение. *Сплетением последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность $\{c_n\} = \{\widetilde{a_n, b_n}\}$, состоящая только из членов этих двух последовательностей, расположенных в произвольном порядке по отношению к друг к другу, такая, что,* ***либо*** *она содержит все члены каждой из сплетаемых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, расположенных в том же порядке, как и в исходных,* ***либо*** *она содержит все члены одной из сплетаемых последовательностей $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$, расположенных в том же порядке, как и в исходной и, конечное число начальных членов другой последовательности, опять же, в том же порядке.*

Другими словами, если произвольно между некоторыми членами одной из последовательностей, вставить все члены другой последовательности или несколько его первых членов, сохраняя порядок следования, и без пропусков, то получим последовательность, которая называется сплетением рассматриваемых последовательностей.

То есть сплетение может оканчиваться и членами только одной из сплетаемых последовательностей. Для двух данных последовательностей, сплетение может быть получено неограниченно большим числом способов. Эта операция частична на множестве сходящихся последовательностей (с рациональными или с вещественными членами), так как в результате сплетения последовательностей из разных смежных классов может получиться последовательность, не имеющая предела.

Очевидной является следующая лемма.

Лемма 1. *В результате сплетения в факторкольце K/I (или P/I) последовательностей из одного смежного класса (любым способом) получается последовательность из того же класса. Другими словами, каждый смежный класс этих факторколец замкнут относительно операции сплетения.*

Пусть нам даны всевозможные односторонние последовательности (с рациональными или вещественными членами), сходящиеся к вещественному числу a, то есть такие, что либо все члены таких последовательностей больше или равны числу a, либо меньше или равны. Покажем, что любая последовательность, сходящаяся к a, может быть получена сплетением двух односторонних последовательностей, сходящихся к a с разных сторон. Действительно, каждый член рассматриваемой последовательности либо больше или равен, либо меньше или равен a. Разбивая последовательность на две подпоследовательности (одна из которых может быть конечной): меньшие члены в одну подпоследовательность, большие – в другую, равные (если таковые есть) произвольно в ту или другую, получим, что исходная последовательность является, либо сплетением двух подпоследовательностей, с неограниченным числом членов в каждой (они имеют тот же предел, что и исходная последовательность), либо одна из подпоследовательностей содержит конечное число членов, – в этом случае, ее формально дополним членами соответствующей односторонней сходящейся (произвольной) последовательности, с тем же пределом, что и исходная. Теперь, в обоих случаях количество членов каждой подпоследовательности неограниченно, эти подпоследовательности рассматриваются как односторонние последовательности, сплетением которых является исходная последовательность. Таким образом, чтобы показать, что *данные последовательности* образуют смежный класс соответствующего факторкольца, достаточно иметь всевозможные односторонние (с обеих сторон) последовательности, сходящиеся к одному и тому же числу, из которых операцией сплетения и получаются эти *данные последовательности*. Нами доказана

Лемма 2. *Каждый смежный класс фактор-кольца K/I (или P/I) порожден всевозможными односторонними последовательностями этого же класса относительно операции сплетения.*

Пусть задано сечение Дедекинда $(A_1; A_2)$ множества рациональных чисел (см.[13]). Сначала, рассмотрим всевозможные сходящиеся последовательности $\{a_n\}$, составленные из чисел принадлежащих A_2, из которых ниже нас будут интересовать следующие два случая:

1) Множество A_2 содержит наименьший элемент.

В этом случае перейдем к рассмотрению всех последовательностей с членами из A_2, сходящихся к этому наименьшему элементу.

2) Множество A_2 не содержит наименьшего элемента.

В этом случае перейдем к рассмотрению всех сходящихся последовательностей с членами из A_2, удовлетворяющих условию:

для любого $a \in A_2$, найдется индекс k, такой, что $a_m < a$ для всех $m > k$. (1)

В первом случае существование последовательностей с членами из A_2, сходящихся к наименьшему элементу не вызывает сомнений, например, таковыми являются стационарные или стабилизирующиеся последовательности, которых, в частности, нет во втором случае. Несмотря на это и во втором случае, сходящиеся последовательности с членами из A_2, удовлетворяющие условию: *для любого $a \in A_2$, найдется индекс*

k, такой, что $a_m < a$ для всех $m > k$, также существуют, например, таковыми являются фундаментальные числовые последовательности по Коши, модули разностей $a_n - a_{n-1}$ между соседними членами которых, не превосходят соответственно $\frac{1}{2^n}$, где $n = 2,3, \dots$.

Построим такую последовательность. Пусть $a_1 \in A_2$ и пусть неотрицательное целое l таково, что $a_1 - l \in A_2$, а $a_1 - (l+1) \in A_1$. Далее, обозначив разность через $a_2 = a_1 - l$, перейдем к разности $a_2 - \frac{1}{2}$. Если $a_2 - \frac{1}{2}$ принадлежит A_2, то обозначим эту разность через $a_3 = a_2 - \frac{1}{2}$. Если же $a_2 - \frac{1}{2}$ принадлежит A_1, то перейдем к разности $a_2 - \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2^2}$, которая также, либо принадлежит A_2, тогда мы построили $a_3 = a_2 - \frac{1}{2^2}$, либо принадлежит A_1, тогда перейдем к разности $a_2 - \frac{1}{2^3} < \frac{1}{2^3}$ и так далее, до тех пор пока разность не станет принадлежать A_2: $a_2 - \frac{1}{2^{k_2}} \in A_2$, а $a_2 - \frac{1}{2^{k_2-1}}$ принадлежит A_1. Такое k_2 обязательно найдется, так как иначе при любом конечном k, $a_2 - \frac{1}{2^k} \in A_1$, а это означает, что A_2 содержит наименьший элемент, а это не так в рассматриваемом случае. Обозначив через $a_3 = a_2 - \frac{1}{2^{k_2}} \in A_2$, заметим, что $a_2 - a_3 = \frac{1}{2^{k_2}}$. Продолжая, таким образом, процесс построения, получим последовательность $\{a_n\}$, все члены которой принадлежат A_2 и удовлетворяют условию 1. Притом, последовательность является фундаментальной. Действительно, так как $a_1 - a_2 = l$, $a_2 - a_3 \leq \frac{1}{2}$, $a_3 - a_4 \leq \frac{1}{2^2}$, … , $a_k - a_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, … , откуда следует, что для любого сколь угодно маленького $\varepsilon > 0$ найдется индекс $s \geq 1$ такой, что какими бы ни были $p, q > s$, $q > p$, разность $a_p - a_q < \varepsilon$. В самом деле, разность $a_p - a_q = (a_p - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_{p+2}) + \dots + (a_{q-2} - a_{q-1}) + (a_{q-1} - a_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} + \dots + \frac{1}{2^{p+(q-p)}} < \frac{1}{2^{p-2}}$, поэтому достаточно в качестве s взять такое значение, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{2^s} \leq \varepsilon$.

Аналогично, рассмотрим всевозможные сходящиеся последовательности $\{b_n\}$, составленные из чисел принадлежащих A_1. Здесь также возможны два случая:

1) Множество A_1 содержит наибольший элемент.

В этом случае перейдем к рассмотрению всех последовательностей с членами из A_1, сходящихся к этому наибольшему элементу.

2) Множество A_1 не содержит наибольшего элемента.

В этом случае перейдем к рассмотрению всех последовательностей с членами из A_1, удовлетворяющих условию:

для любого $b \in A_1$, найдется индекс k, такой, что $b_m > b$ для всех $m > k$. (2)

Аналогично вышеизложенному, последовательности с членами из A_1, удовлетворяющие условию (2) существуют. Возвращаясь к сечению Дедекинда, теперь можем перейти к разбору трех случаев:

1. Множество A_1 содержит наибольший элемент, а множество A_2 (соответственно) не содержит наименьшего элемента, так как для сечения одновременно этого быть не может.
2. Множество A_2 содержит наименьший элемент, а множество A_1 не содержит наибольшего элемента.
3. Множество A_1 не содержит наибольшего элемента, и множество A_2 не содержит наименьшего элемента.

Случай 1. В этом случае у нас возникают следующие два типа односторонних последовательностей:

1-й тип: все последовательности с членами из A_1, сходящиеся к наибольшему элементу из A_1;

2-й тип: все сходящиеся последовательности с членами из A_2, удовлетворяющие условию (1).

Покажем сначала, что сходящиеся последовательности с членами из A_2, удовлетворяющие условию (1), не могут сходиться ни к одному из чисел $c \geq a$, где $a \in A_2$. Действительно, противное означало бы нарушение условия (1), так как, если бы какая-то из последовательностей сходилась бы к $c \geq a$, где $a \in A_2$, то для любого $c_1 < c$, $c_1 \in A_2$ лишь конечное число членов последовательности окажутся меньше c_1, что нарушает условие (1). Это, в частности, означает, что пределы этих последовательностей строго меньше любого элемента из A_2.

Разность между двумя произвольными представителями последовательностей этих двух типов, есть последовательность, сходящаяся к нулю. Действительно, в противном случае, эта разность сходится к ненулевому значению, что означает, что последовательности имеют разные пределы. Между наибольшим элементом из A_1 (это предел последовательности первого типа) и пределом последовательности второго типа, согласно вышеизложенного, найдется, **либо** неограниченное количество рациональных чисел, не принадлежащих ни одному из множеств сечения, что противоречит одному из условий сечения, а именно: объединение множеств A_1 и A_2 совпадает со всем множеством рациональных чисел, **либо** неограниченное количество рациональных чисел, принадлежащих обоим множествам сечения, что также противоречит другому из условий сечения, а именно: пересечение множеств A_1 и A_2 пусто.

Таким образом, все рассматриваемые здесь последовательности сходятся к одному и тому же значению, а именно, наибольшему элементу из A_1. Очевидно, что последовательности второго типа представляют множество всевозможных односторонних последовательностей с членами из Q, сходящихся к наибольшему элементу из A_1. Согласно леммам 1 и 2, мы имеем смежный класс в факторкольце K/I, который в соответствие с изоморфизмом, определяет **место**, соответствующее наибольшему элементу из A_1.

Случай 2 рассматривается аналогично.

Перейдем к случаю 3. Здесь также два типа односторонних последовательностей:

1-й тип: все последовательности с членами из A_1, удовлетворяющие условию (2)

2-й тип: все последовательности с членами из A_2, удовлетворяющие условию (1).

Аналогично случаям 1 и 2, все последовательности каждого типа не могут сходиться к числам $c \leq b$, где $b \in A_1$, для 1-го типа, и $c \geq a$, где $a \in A_2$ для 2-го типа. Пределы последовательностей первого типа строго больше любого элемента из A_1. Пределы последовательностей первого типа строго меньше любого элемента из A_2. Причем каждый предел последовательностей первого типа не превосходит каждого из пределов последовательностей второго типа, иначе, нарушилось бы условие сечения, что каждый элемент множества A_1 меньше любого элемента множества A_2 или каждый элемент множества A_2 больше любого элемента множества A_1.

Разность между двумя произвольными представителями последовательностей этих двух типов, есть последовательность, сходящаяся к нулю. Действительно, в противном случае, эта разность сходится к ненулевому значению c, что означает, что последовательности имеют разные пределы, скажем b и a, для первого и второго типов соответственно, причем $b < a$, то между b и a найдется неограниченное количество рациональных чисел, не принадлежащих ни одному из множеств сечения, что, как и выше, противоречит, одному из условий сечения, а именно: объединение множеств A_1 и A_2 совпадает со всем множеством рациональных чисел. Таким образом, все последовательности обоих типов сходятся к одному и тому же значению. Далее, аналогично: односторонние последовательности этих двух типов совпадают со всевозможными односторонними последовательностями с членами из Q, сходящихся к одному и тому же пределу, не принадлежащему ни одному из множеств сечения A_1 и A_2. Согласно леммам 1 и 2, мы имеем смежный класс в факторкольце K/I, который в соответствие с изоморфизмом, определяет **место**, соответствующее (единственному) иррациональному числу.

Р.Дедекинд в [13] пишет следующее:

Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, то есть в следующем:

«Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска»

И далее.

Как уже и было сказано, я, кажется, не ошибаюсь, приняв, что каждый тотчас же согласится с истинностью этого утверждения;

большинство моих читателей будут даже очень разочарованы, узнав, что посредством этой тривиальности должен быть снят покров с тайны непрерывности. По этому поводу я замечу следующее: мне очень приятно, если каждый находит упомянутый принцип столь ясным и в такой мере согласным со своим представлением о прямой линии, ибо ***я решительно не в состоянии привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и*** **никто** ***не в состоянии этого сделать****. Принятие этого свойства прямой линии есть не что иное, как* **аксиома***, посредством которой мы только и признаем за прямой ее непрерывность, мысленно вкладываем (hineindenken) непрерывность в прямую.*

Таким образом, нам удалось доказать то, что Дедекинд считал недоказуемым и, соответственно, может быть принято лишь как аксиома. Оснований, чтобы так считать у Дедекинда было предостаточно, так как он подчеркивал (см.[13]), что «*прямая L бесконечно более богата индивидуумами-точками, чем область R рациональных чисел индивидуумами-числами.*». Между двумя различными вещественными числами всегда есть множество других чисел, тем более, между двумя различными рациональными числами. А числа из двух рассматриваемых множеств сечения различны, и почему тогда в сечении только одна точка?

Доказать утверждение, которое Дедекинд принял за аксиому можно также, используя принцип вложенных отрезков, с тем представлением, который был дан в п.3.1.2. Например, рассматривая произвольные системы вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, где $a_n \in A_1, b_n \in A_2$, $n = 1,2, \dots$.

3.2.2 Выколотые точки вещественной прямой. Рассматривая сечение Дедекинда, я мысленно взял две нитки, считая их прямыми, одну разрезал на две части, которые соединил (приложил) так, что между ними было расстояние равное нулю и, представил, что внешне они имеют совершенно одинаковый вид. И задал себе вопрос: чем они отличаются? В конце концов, пришел к выводу, что убирается **место**, представленное смежным классом по идеалу J стабилизирующимися последовательностями (выделенными элементами) факторкольца

P_J/I_J, а остальные выделенные элементы смежного класса по идеалу I_J определяющего место разреза, уже не образуют цельный смежный класс. Получается, что точка не выколота, а **разрушена**. В рассматриваемом смежном классе будут отсутствовать выделенные элементы, состоящие из последовательностей, которые содержат стабилизирующиеся подпоследовательности. Кроме того, разрезанная прямая в данном месте, уже не содержит двусторонние последовательности, сходящиеся к данному месту, то есть две части прямой не сплетаются и нарушается непрерывность, но разрыв происходит не в точке, а в месте, так как другие последовательности, не представляющие смежные классы стабилизирующихся последовательностей по идеалу J, и смежные классы последовательностей, которые содержат стабилизирующиеся подпоследовательности, остаются не поврежденными. Отсюда, кстати следует, что прямая не состоит из чисел, как мы их понимаем – один представитель (одна последовательность из смежного класса по идеалу I или один смежный класс стабилизирующихся последовательностей по идеалу J в смежных классах по идеалу I_J), а из точек, представленных (полными) смежными классами последовательностей по идеалу I_J.

Глава 4

Квазиподобие и аксиома Архимеда

§ 4.1 Подобие и квазиподобие

4.1.1 Определения подобия и квазиподобия.

Определение 1. *Последовательность $\{b_n\} \in P$ называется аддитивно подобной последовательности $\{a_n\} \in P$ с коэффициентом $k \neq 0$, $k \in R$ (конечное вещественное число), если $\{a_n\} - k\{b_n\} = \{0\}$.*

Сразу рассмотрим отношение аддитивного подобия с произвольным вещественным коэффициентом $k \neq 0$ в факторкольце P/I.

Лемма 1. *В каждом смежном классе $[b] = \{b\} + I, b \neq 0$, для данной последовательности $\{a_n\}$, сходящейся к $a \neq 0$, найдется единственная последовательность $\{b_n\}$ аддитивно подобная $\{a_n\}$ с некоторым вещественным коэффициентом $k \neq 0$.*

Доказательство. По условию леммы последовательность $\{a_n\}$ сходится к $a \neq 0$, поэтому при $k = \frac{a}{b}$ последовательность $k\{b_n\} = \{kb_n\} = \left\{\frac{a}{b}b_n\right\}$ сходится к a, где $\{b_n\}$ – произвольная последовательность из $[b]$. В качестве искомой последовательности $\{b_n\}$ рассмотрим последовательность $\{b_n\} = \left\{\frac{b}{a}a_n\right\}$. Действительно, она сходится к b и, согласно определению 1, $\{a_n\} - k\{b_n\} = \{a_n\} - k\left\{\frac{b}{a}a_n\right\} = \{a_n\} - \frac{a}{b}\left\{\frac{b}{a}a_n\right\} = \{a_n\} - \left\{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}a_n\right\} = \{0\}$. Единственность $\{b_n\}$ следует из того, что при $k \neq \frac{a}{b}$ разность $\{b_n\} - \{ka_n\} = \left\{\frac{b}{a}a_n\right\} - \{ka_n\} = \frac{b}{a}\{a_n\} - k\{a_n\} = \left(\frac{b}{a} - k\right)\{a_n\} \neq \{0\}$, так как $\frac{b}{a} - k \neq 0$ и $\{a_n\}$ сходится к $a \neq 0$. Что и требовалось доказать.

Из леммы, в частности, следует, что любую стационарную последовательность, отличную от нулевой, можно перевести в любую другую стационарную последовательность умножением на подходящее вещественное число. Это некоторый аналог аксиомы Архимеда.

Определение 2. *Последовательность* $\{b_n\} \in P$ *называется аддитивно квазиподобной последовательности* $\{a_n\} \in P$ *с коэффициентом* $k \neq 0$, $k \in R$ *(конечное вещественное число), если* $\{a_n\} - k\{b_n\} \in I$.

Определение 3. *Последовательность* $\{b_n\} \in S$ *(*S *мультипликативный моноид всех последовательностей без нулевых членов в кольце* P*) называется мультипликативно подобной последовательности* $\{a_n\} \in P$ *с коэффициентом* $k \neq 0$, $k \in R$ *(конечное вещественное число), если* $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \{k\}$.

Здесь также сразу рассмотрим отношение мультипликативного подобия с произвольным вещественным коэффициентом $k \neq 0$ в факторкольце P/I.

Лемма 2. *В каждом смежном классе* $[b] = \{b\} + I, b \neq 0$, *для данной последовательности* $\{a_n\} \in S$, *сходящейся к* $a \neq 0$, *найдется единственная последовательность* $\{b_n\}$ *мультипликативно подобная* $\{a_n\}$ *с некоторым вещественным коэффициентом* $k \neq 0$.

Доказательство. Аналогично лемме 1, по условию леммы последовательность $\{a_n\}$ сходится *к* $a \neq 0$, поэтому при $k = \frac{a}{b}$ последовательность $k\{b_n\} = \{kb_n\} = \left\{\frac{a}{b} b_n\right\}$ сходится к a, где $\{b_n\}$ – произвольная последовательность из $[b]$. В качестве искомой последовательности $\{b_n\}$ рассмотрим последовательность $\{b_n\} = \left\{\frac{b}{a} a_n\right\}$. Действительно, она сходится к b, $\{b_n\} = \left\{\frac{b}{a} a_n\right\} \in S$ и, согласно определению 3, $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \frac{\{a_n\}}{\left\{\frac{b}{a} a_n\right\}} = \left\{\frac{a_n}{\frac{b}{a} a_n}\right\} = \left\{\frac{a}{b}\right\} = \{k\}$. Единственность $\{b_n\}$ следует из того, что при $k \neq \frac{a}{b}$ отношение $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \{k\} \notin \left[\left\{\frac{a}{b}\right\}\right]$, хотя $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} \in \left[\left\{\frac{a}{b}\right\}\right]$, так как $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}}$ сходится к $\frac{a}{b}$. Что и требовалось доказать.

Определение 4. *Последовательность* $\{b_n\} \in S$ *(*S *мультипликативный моноид всех последовательностей без нулевых членов в кольце* P*) называется мультипликативно квазиподобной последовательности*

$\{a_n\} \in P$ с коэффициентом $k \neq 0, k \in R$ (конечное вещественное число), если $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \in [k]$.

Стационарная последовательность $\{0\}$ аддитивно подобна сама себе с произвольным коэффициентом $k \neq 0$ и аддитивно квазиподобна с произвольным коэффициентом $k \neq 0$ любой последовательности из I. Мультипликативное (квази)подобие для последовательностей, содержащих нулевые члены, не определено, в частности, для стационарной последовательности $\{0\}$.

Аддитивное (мультипликативное) подобие является частным случаем аддитивного (мультипликативного) квазиподобия.

Отношение аддитивного квазиподобия на P не симметрично при $k \neq 1$, но если нас не интересует значение коэффициента квазиподобия, (в этом случае будем говорить об аддитивном квазиподобии с произвольным ненулевым коэффициентом), то отношение аддитивного квазиподобия является отношением эквивалентности на множестве всех сходящихся последовательностей.

Действительно, все последовательности сходящиеся к ненулевым значениям $a \neq 0$ – аддитивно квазиподобны друг другу, в силу того, что коэффициенты $k \neq 0$ являются обратимыми, то есть свойство симметричности выполняется, рефлексивность и транзитивность очевидны. Все последовательности, сходящиеся к нулю, также взаимно аддитивно квазиподобны с произвольным вещественным коэффициентом $k \neq 0$. Последовательности сходящиеся к нулю и последовательности сходящиеся к $a \neq 0$ не являются аддитивно квазиподобными с коэффициентом $k \neq 0$ (аксиома Архимеда не выполняется).

Отношение аддитивного квазиподобия разбивает основное множество кольца P на два класса эквивалентных элементов: все последовательности смежных классов, отличных от идеала I образуют один класс, последовательности самого I – другой.

Мультипликативное квазиподобие последовательности $\{b_n\} \in S$ к последовательности $\{a_n\} \in P$ с коэффициентом $k \neq 0$, влечет аддитивное квазиподобие этой последовательности $\{b_n\} \in S$ к последовательности $\{a_n\} \in P$ с тем же коэффициентом k. Обратное, вообще говоря, неверно, так как мультипликативное квазиподобие определено не для произвольных сходящихся последовательностей.

Все определения с факторкольца P/I перенесем на факторкольцо P_J/I_J, рассматривая смежные классы по идеалу J, как выделенные представители смежных классов по идеалу I_J (см. 2.2.2). Напомним, что смежные классы по идеалу J (выделенные элементы) обозначаются $\{\bar{b}_n\}$: $\{\bar{b}_n\} = \{b_n\} + J$.

Определение 5. *Выделенный элемент* $\{\bar{b}_n\} = (\{b_n\} + J)$ *из* P_J/I_J, *называется аддитивно подобным с коэффициентом* $k \neq 0$, $k \in R$, *выделенному элементу* $\{\bar{a}_n\} = (\{a_n\} + J)$ *из* P_J/I_J, *если* $\{a_n\} - k\{b_n\} \in J$.

Имеется аналог леммы 1.

Лемма 3. *В каждом смежном классе* $\{\bar{b}_n\} + I_J = (\{b_n\} + J) + I_J$ *из* P_J/I_J, *где* $\{b_n\}$ *сходится к* $b \neq 0$, *для данного выделенного элемента* $\{\bar{a}_n\} = \{a_n\} + J$, *где* $\{a_n\}$ *сходится к* $a \neq 0$, *найдется единственный выделенный элемент* $\{\bar{b}_n\} = \{b_n\} + J$ *аддитивно подобный* $\{\bar{a}_n\}$ *с некоторым вещественным коэффициентом* $k \neq 0$.

Доказательство. Следует из леммы 1.

Определение 6. *Выделенный элемент* $\{\bar{b}_n\} = (\{b_n\} + J)$ *из* P_J/I_J *называется аддитивно квазиподобным с коэффициентом* $k \neq 0$, $k \in R$, *выделенному элементу* $\{\bar{a}_n\} = (\{a_n\} + J)$ *из* P_J/I_J, *если* $\{\bar{a}_n\} - k\{\bar{b}_n\} = (\{a_n\} - k\{b_n\}) + J \in I_J$.

Определение 7. *Выделенный элемент* $\{\bar{b}_n\} = (\{b_n\} + J)$ *из* P_J/I_J, *где* $\{\bar{b}_n\} \in \overline{S_J}$ *(*$\overline{S_J}$ *– мультипликативный моноид всех элементов факторкольца* P_J, *представители которых содержат конечное число нулевых членов) называется мультипликативно подобным выделенному элементу* $\{\bar{a}_n\} = (\{a_n\} + J)$ *из* P_J/I_J *с коэффициентом* $k \neq 0$ *(конечное вещественное число), если отношение выделенных элементов* $\frac{\{\bar{a}_n\}}{\{\bar{b}_n\}} = \frac{\{a_n\}+J}{\{b_n\}+J} = \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} + J = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} + J = \{k\} + J$ *есть класс стабилизирующихся последовательностей по идеалу* J, *все члены которых, начиная с некоторого конечного индекса равны числу* k.

Здесь деление определено так же, как и раньше: в силу того, что нас интересует только «хвост», все нули в представителях из $\overline{S_J}$ можно заменить на произвольные ненулевые вещественные числа. Деление, очевидно, корректно. Теперь аналог леммы 2.

Лемма 4. *В каждом смежном классе* $\{\bar{b}_n\} + I_J = (\{b_n\} + J) + I_J$ *из* P_J/I_J, *где* $\{b_n\}$ *сходится к* $b \neq 0$, *для данного выделенного элемента* $\{\bar{a}_n\} = \{a_n\} + J$, *где* $\{a_n\}$ *сходится к* $a \neq 0$, *найдется единственный выделенный элемент* $\{\bar{b}_n\} = \{b_n\} + J$ *мультиплакативно подобный* $\{\bar{a}_n\}$ *с некоторым вещественным коэффициентом* $k \neq 0$.

Доказательство. Следует из леммы 2.

Определение 8. *Выделенный элемент* $\{\bar{b}_n\} = (\{b_n\} + J)$ *из* P_J/I_J, *где* $\{\bar{b}_n\} \in \bar{S_J}$ *(*$\bar{S_J}$ *– мультипликативный моноид всех элементов факторкольца* P_J, *представители которых содержат конечное число нулевых членов) называется мультипликативно квазиподобным выделенному элементу* $\{\bar{a}_n\} = (\{a_n\} + J)$ *из* P_J/I_J *с коэффициентом* $k \neq 0$ *(конечное вещественное число), если отношение выделенных элементов* $\frac{\{\bar{a}_n\}}{\{\bar{b}_n\}} = \frac{\{a_n\}+J}{\{b_n\}+J} = \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} + J = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} + J$ есть *смежный класс последовательностей по идеалу* J, *сходящихся к числу* k, *все члены каждой пары которых, начиная с некоторого конечного индекса, совпадают (у всех одинаковые «хвосты»).*

Заметим, что любые два выделенных элемента из одного смежного класса по идеалу I_J, отличного от самого идеала I_J, (взаимно) мультипликативно квазиподобны с коэффициентом $k = 1$.

Отношения же представителей элементов в I_J, благодаря частичной операции деления, введенной в п.2.2.2, могут равняться любой наперед заданной последовательности, в том числе и неограниченно большой и не имеющей предела. В нашем случае, в частности, это означает, что для любого вещественного числа $k \neq 0$, найдутся (соответствующие определению 8) выделенные представители из I_J, один из которых будет мультипликативно квази(подобен) другому с коэффициентом k. Напомним, что в кольце P_J/I_J операция деления определена лишь для тех пар смежных классов по идеалу J (выделенных элементов), где в результате их деления получается, в качестве выделенного представителя смежный класс по идеалу J, состоящий из сходящихся последовательностей, каждые две из которых отличаются лишь на конечное число членов (имеют одинаковый хвост).

Мультипликативное (квази)подобие с ненулевым коэффициентом $k \neq 1$, не является ни рефлексивным, ни симметричным, ни транзитивным бинарным отношением, поэтому отношение мультипликативного (квази)подобия не является отношением эквивалентности на P_J/I_J.

Однако, если рассматривать $\overline{S_J}$ – мультипликативный моноид всех смежных классов факторкольца P_J, произвольные представители каждого из которых содержат лишь конечное число нулевых членов, то на $\overline{S_J}$ мультипликативное квазиподобие с произвольным вещественным конечным коэффициентом, отличным от нуля, является отношением эквивалентности.

Определим следующее множество: $\overline{U_J}$ – это множество смежных классов из $\overline{S_J}$, представители которых сходятся к нулю (и также имеют лишь конечное число нулевых членов). Запишем $\overline{S_J}$ как объединение двух множеств: $\overline{S_J} = \left\{\overline{S_J} \setminus \overline{U_J}\right\} \cup \left\{\overline{U_J}\right\}$ (теоретико-множественная разность и теоретико-множественное объединение).

Множество $\left\{\overline{S_J} \setminus \overline{U_J}\right\}$ составляет один класс мультипликативно квазиподобных с произвольным вещественным конечным коэффициентом, отличным от нуля. А множество $\left\{\overline{U_J}\right\}$ разбивается на множество классов мультипликативно квазиподобных с произвольным вещественным конечным коэффициентом, отличным от нуля. В разные классы из $\left\{\overline{U_J}\right\}$ попадут элементы, отношение которых не определено, то есть представляется либо неограниченно большой последовательностью, либо неограниченно малой, либо не имеющей предела. Например, последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ представляют разные смежные классы мультипликативно квазиподобных с произвольным вещественным конечным коэффициентом, отличным от нуля, так как их отношение $\left.\left\{\frac{1}{n}\right\}\middle/\left\{\frac{1}{n^2}\right\}\right. = \{n\}$ – неограниченно большая последовательность.

А в одном смежном классе, например, с последовательностью $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, находятся все последовательности мультипликативно квази(подобные) с конечным вещественным коэффициентом, отличным от нуля (по идеалу J).

Рассмотрим мультипликативное квазиподобие с коэффициентом $k = 1$, это отношение также является отношением эквивалентности на $\overline{S_J}$. Оно разбивает множество $\overline{S_J}$ на классы мультипликативно квазиподобных элементов с коэффициентом $k = 1$. Множество $\left\{\overline{S_J} \setminus \overline{U_J}\right\}$ разбивается на классы по их сходимости представителей к вещественным числам, отличным от нуля, так как два элемента, мультипликативно квазиподобные с коэффициентом $k = 1$, не могут сходится к разным числам. Эти классы совпадают со смежными классами кольца P_J/I_J, отличными от идеала I_J, так как любые выделенные элементы из одного смежного класса мультипликативно квазиподобны с коэффициентом $k = 1$, отношение любых представителей из разных смежных классов отлично от единицы и множество $\left\{\overline{S_J} \setminus \overline{U_J}\right\}$ совпадает с множеством $P_J \backslash I_J$.

Для представителей из $\left\{\overline{U_J}\right\}$ ситуация несколько иная, так как $\left\{\overline{U_J}\right\} \subset I_J$, то есть элементы из $\left\{\overline{U_J}\right\}$ лежат в одном классе по идеалу I_J, а классы мультипликативно квазиподобных элементов могут принадлежать разным. Например, $\{\tilde{\alpha}_n\} + I_J = (\{\alpha_n\} + J) + I_J$ и $\{k\tilde{\alpha}_n\} + I_J = (\{k\alpha_n\} + J) + I_J$, где $\{\tilde{\alpha}_n\} \in \widetilde{U}$, k – произвольное фиксированное вещественное число, отличное от единицы.

А как обстоит дело в идеале I_J? В случае, когда «хвост» смежного класса по идеалу J в фактор-кольце P_J/I_J содержит неограниченное количество нулевых членов, аналога леммам 1 и 2 не получается, так как подобие существенно зависит от расположения нулевых членов, которые при умножении на $k \neq 0$ не меняются. Но для элементов из $U_J \subset I_J$, справедлива следующая

Лемма 3. *Каждый смежный класс элементов $(\{b_n\} + J) + I_J \subset U_J + I_J$ мультипликативно квазиподобных с коэффициентом равным единице, для данного элемента $\{a_n\} + J \subset U_J$, (смежного класса по идеалу J) содержит единственный, мультипликативно подобный ему с некоторым вещественным коэффициентом $k \neq 0$, элемент $\left\{b_n'\right\} + J \in (\{b_n\} + J) + I_J$, если элемент $\{b_n\} + J$ мультипликативно квазиподобен элементу $\{a_n\} + J$ с тем же коэффициентом $k \neq 0$.*

Доказательство. В качестве искомого элемента $\{b'_n\}+J$ достаточно рассмотреть $\{b'_n\}+J=\left\{\frac{1}{k}a_n\right\}+J$.

Лемма 3 будет использована при определении дифференциала.

Определение 9. *Элемент* $\{\beta_n\}+J\in U_J$ *называется мультипликативно малым по отношению к элементу* $\{\alpha_n\}+J\in U_J$*, если* $\{\alpha_n+\beta_n\}+J$ *и* $\{\alpha_n\}+J$ *мультипликативно квазиподобны с коэффициентом* $k=1$.

Существование мультипликативно малых элементов по отношению к другим элементам следует из теоремы.

Теорема. *Будем находиться в кольце смежных классов* P_J/I_J. *Пусть* $\{\alpha_n\}\in U$*, тогда выделенные элементы* $\{\alpha_n\}+J$ *и* $(\{\alpha_n\}+J)^m=\{\alpha_n\}^m+J=\{\alpha_n^m\}+J$ *не мультипликативно квазиподобны ни с каким конечным, отличным от нуля, вещественным коэффициентом. Здесь* $m\in\{2,3,\dots\}$.

Кроме того, $(\{\alpha_n\}+J)+(\{\alpha_n^k\}+J)=\{\alpha_n+\alpha_n^k\}+J\approx\{\alpha_n\}+J$, $k\in\{2,3,\dots\}$, то есть мультипликативно квазиподобны с коэффициентом равным единице (знак $\approx$ как раз это и означает).

Доказательство. $\frac{\{\alpha_n^m\}+J}{\{\alpha_n\}+J}=\frac{\{\alpha_n^m\}}{\{\alpha_n\}}+J=\left\{\frac{\alpha_n^m}{\alpha_n}\right\}+J=\{\alpha_n^{m-1}\}+J\in U_J\subset I_J$, то есть последовательность сходится к нулю. Кроме того, $\frac{\{\alpha_n+\alpha_n^k\}+J}{\{\alpha_n\}+J}=\frac{\{\alpha_n+\alpha_n^k\}}{\{\alpha_n\}}+J=\left\{\frac{\alpha_n+\alpha_n^k}{\alpha_n}\right\}+J=\{1+\alpha_n^{k-1}\}+J=\{1\}+\{\alpha_n^{k-1}\}+J\approx\{1\}+J\subset[1]_J$, то есть $\{\alpha_n+\alpha_n^k\}+J$ и $\{\alpha_n\}+J$ мультипликативно квазиподобны с коэффициентом равным 1, или, что тоже самое, они представляют один и тот же смежный класс квазиподобных элементов с коэффициентом равным единице в идеале I_J (в $U_J\subset I_J$) факторкольца P_J/I_J. Что и требовалось доказать.

Определение 10. *Элемент* $\{\beta_n\}+J\in P_J$ *называется аддитивно малым по отношению к элементу* $\{\alpha_n\}+J\in P_J$*, если* $\{\alpha_n+\beta_n\}+J$ *и* $\{\alpha_n\}+J$ *аддитивно квазиподобны с коэффициентом* $k=1$.

Очевидно, что аддитивно малыми выделенными элементами в факторкольце P_J/I_J по отношению к любым выделенным элементам, не принадлежащим I_J, являются все выделенные элементы из I_J, и только они. По отношению к выделенным элементам, принадлежащим I_J, это, конечно же, не так.

Замечание. Очевидно, что мультипликативно (аддитивно) квазиподобные с коэффициентом равным 1 последовательности из U (представители элементов из

U_J), отличаются между собой на аддитивно малые, по отношению к себе, последовательности. Так, например, всякая последовательность из разности $\{\alpha_n - \beta_n\} + J$ является аддитивно малой по отношению к последовательностям из $\{\alpha_n\} + J$ и $\{\beta_n\} + J$, если они квазиподобны с коэффициентом равным единице (и вообще к любой последовательности квазиподобной к $\{\alpha_n\} + J$ (а, значит и к $\{\beta_n\} + J$) с некоторым вещественным коэффициентом $k \neq 0$, в том числе и $k = 1$).

Находясь во множестве U_J можно говорить об аддитивно малом элементе $\{\alpha_n - \beta_n\} + J$ по отношению к элементам $\{\alpha_n\} + J$ и $\{\beta_n\} + J$.

Непрерывность подмножества множества R в данном месте означает, что это **место представлено** в P_J/I_J смежным классом $(\{\alpha_n\} + J) + I_J$ при соответствующем изоморфизме $R \cong P/I \cong {(P/J)}\big/{(I/J)} = P_J/I_J$.

На самом деле, между двумя последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, сходящимися к одному и тому же значению c, всегда есть последовательность, например, $\{c_n\} = \left\{c + \frac{min\{|a_n - c||; b_n - c|\}}{2}\right\}$, которая также сходится к тому же значению, но «ближе» (или равна) к этому значению, чем обе эти последовательности. Поэтому и здесь непрерывность каждый раз определяется лишь с точностью до неограниченно малых более высокого порядка, которые «мало» меняют хвост, то есть мультипликативно квазиподобны с коэффициентом равным единице, например, как в теореме: $(\{\alpha_n\} + J) + (\{\alpha_n^k\} + J) = \{\alpha_n + \alpha_n^k\} + J \approx \{\alpha_n\} + J$.

Поясним на примерах:

1. Если в качестве подмножества множества вещественных чисел R имеем интервал $(a; b) \subset R$, то все значения (места) представлены в P_J/I_J смежными классами и данное подмножество (интервал) непрерывно в каждом месте.
2. Для $[a; b) \subset R$ все значения (места), кроме a представлены в P_J/I_J смежными классами, значение a представлено односторонними последовательностями.
3. Для $[a; b] \subset R$ все значения (места), кроме a и b представлены в P_J/I_J смежными классами, значения a и b представлены соответствующими односторонними последовательностями.
4. Для $(a; b) \cup \{c\} \subset R$, $c \notin (a; b)$ все значения (места) интервала $(a; b)$ представлены в P_J/I_J смежными классами и он непрерывен в каждом месте. Значение же c изолировано и представляется классом стабилизирующихся последовательностей $\{\mathrm{c}\} + J$.

Определение 11. *Пусть функция $f(x)$ задана на некотором множестве $A \subset R$ и пусть все члены α_n последовательности $\{\alpha_n\}$ принадлежат множеству A. Определим действие функции f на последовательности: $f(\{\alpha_n\}) = \{f(\alpha_n)\}$.*

Определение 12. *Пусть точка $x_0 \in R$ представлена смежным классом сходящихся последовательностей $(\{\alpha_n\} + J) + I_J \in P_J/I_J$. Для любого множества $A \subset R$, содержащего точку x_0, как внутреннюю, все последовательности из смежного класса $[\{\alpha_n\} + J]$, состоящие из членов, принадлежащих множеству A, называются допустимыми представителями для A и будут обозначаться $\{\hat{\alpha}_n\}$.*

Пусть задана функция $f(x)$ на множестве A. Определим действие этой функции на представителях классов последовательностей, сходящихся к внутренней точке $x_0 \in A$: $(\{\alpha_n\} + J) + I_J \in P_J/I_J$: $f(\{\alpha_n\} + J) = f(\{\alpha_n\}) + J = f(\{\hat{\alpha}_n\}) + J = \{f(\hat{\alpha}_n)\} + J$.

Определение корректно, так как для каждой внутренней точки x_0 множества A, найдется δ —окрестность этой точки полностью лежащая в A. Для любой последовательности сходящейся к x_0 лишь конечное число членов этой последовательности не принадлежат δ —окрестности этой точки, а значит лишь конечное число членов последовательности могут не принадлежать множеству A, которые можно заменить на произвольные числа, принадлежащие множеству A. Поэтому всегда найдется последовательность в любом смежном классе с членами из множества A (то есть допустимая), с тем же «хвостом», что и любая другая из этого же класса по идеалу J. Далее, рассматривая функции определенные на множествах, можно рассматривать действия этих функций на последовательностях, представляющих внутренние точки этих множеств, не заботясь о принадлежности членов этих последовательностей, области определения функции.

Исходя из вышеизложенного, можно говорить о ***допустимых элементах*** *по идеалу J кольца P_J/I_J.*

Определение 13. *Функция $f(x)$ определенная на интервале $(a; b)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in (a; b)$, если для любого допустимого представителя $\{c_n\} + J \in [x_0] + J$, значение $f(\{c_n\}) + J \in [f(x_0)] + J$*

Пример. Пусть $f(x) = x^2$, $x \in R$. Она непрерывна в точке $2 \in R$, так как для любой последовательности $\{a_n\} \in [2]$, $f(\{a_n\}) = \{f(a_n)\} = \{a_n^2\} \in [4]$. Этот пример показывает, что при отображении непрерывной функции f образом класса $[x_0]$ не обязательно является весь класс $[f(x_0)]$, то есть отображение не обязательно сюръективно. Другими словами, функция $f(x)$ определенная на A непрерывна во внутренней точке $x_0 \in A$, если она любые допустимые аддитивно квазиподобные с коэффициентом $k = 1$ последовательности, сходящиеся к x_0 переводит в аддитивно квазиподобные с коэффициентом $k = 1$ последовательности.

Определение 14. *Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве A, если она определена на A и непрерывна в каждой внутренней точке множества A.*

Суть разрывов функций в точке заключается в том, что сходящиеся последовательности из одного смежного класса, представляющего эту точку, попадают в разные смежные классы после отображения или перестают быть сходящимися.

4.1.2 Определение непрерывно дифференцируемой функции и линейного дифференциала.

Определение. *Функция $f(x)$ непрерывная на множестве A называется непрерывно дифференцируемой во внутренней точке $x_0 \in A$, если для любого элемента $\{\beta_n\} + J \in U_J$ и для любого допустимого элемента $(\{a_n\} + J) + I_J \in P_J/I_J$, где последовательность $\{a_n\}$ сходится к x_0 выполнено $\frac{\{f(a_n+\beta_n)\}-\{f(a_n)\}}{\{\beta_n\}} + J = \frac{\{f(a_n+\beta_n)-f(a_n)\}}{\{\beta_n\}} + J = \left\{\frac{f(a_n+\beta_n)-f(a_n)}{\beta_n}\right\} + J \in [k] + J$.*

Другими словами, какой бы ни была последовательность $\{\beta_n\}$ из U, она мультипликативно квазиподобна последовательности $\{f(a_n + \beta_n) - f(a_n)\}$ с одним и тем же конечным вещественным коэффициентом k.

Теперь, используя лемму 3, можно определить дифференциал. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема в точке $x_0 \in A$. По определению при любом $\{\beta_n\}$ из U имеем, что $\Delta_n f = \{f(a_n + \beta_n) - f(a_n)\} \approx k\{\beta_n\}$ мультипликативно квазиподобны с коэффициентом $k \neq 0$. По лемме 3, в классе элементов $(\{f(a_n + \beta_n) - f(a_n)\} + J) + I_J \subset U_J + I_J$ мультипликативно квазиподобных с коэффициентом равным единице, найдется единственный элемент подобный элементу $\{\beta_n\} + J$ с вещественным коэффициентом $k \neq 0$, который, согласно замечанию из предыдущего пункта, отличается от $\{f(a_n + \beta_n) - f(a_n)\} + J$ на аддитивно малый элемент. Этот единственный элемент **подобный** элементу $\{\beta_n\} + J$ с некоторым вещественным коэффициентом $k \neq 0$ и есть **дифференциал**. Имеем: $\{\Delta_n f\} + J = (\{f(a_n + \beta_n) - f(a_n)\} + J) = (k\{\beta_n\} + J) + (\{\gamma_n\} + J)$, где $\{\gamma_n\} + J$ – аддитивно малый элемент по отношению к элементу $\{f(a_n + \beta_n) - f(a_n)\} + J$ (или к $k\{\beta_n\} + J$).

Таким образом, замена мультипликативно квазиподобной последовательности $\{f(a_n+\beta_n)-f(a_n)\}$ (как представителя соответствующего элемента по идеалу J) с вещественным коэффициентом $k \neq 0$ к неограниченно малой последовательности $\{\beta_n\}$ из U, на единственную мультипликативно подобную к $\{\beta_n\}$ ($\{\beta_n\}$ играет роль приращения аргумента) последовательность $\{k\beta_n\}$, и есть выделение линейной части приращения функции (представителя дифференциала).

Разбиение (см.4.1.1) на множестве $\overline{S_J}$ по отношению эквивалентности мультипликативного квазиподобия с произвольным, отличным от нуля, вещественным коэффициентом k, в части множества $\overline{U_J}$, показывает, что функция имеет (конечную) производную в точке a, если $\{f(a_n+\beta_n)-f(a_n)\}$ и $\{\beta_n\}$ находятся в одном смежном классе данного разбиения, где $\{a_n\}$ – произвольная последовательность, которая сходится к a, $\{\beta_n\}$ – произвольная последовательность из U.

§ 4.2 Идеал и аксиома Архимеда

4.2.1 Аксиома Архимеда в кольце P_J/I_J. В нашем кольце P/I любой смежный класс, отличный от I, можно умножением на подходящую последовательность, перевести в любой заданный смежный класс. В частности, в качестве множителя можно рассматривать стационарные последовательности. Например, класс $[a]$ можно перевести в класс $[b]$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ умножением на произвольную последовательность, не содержащую нулей из класса $\left[\frac{b}{a}\right]$, в частности, на стационарную последовательность $\left\{\frac{b}{a}\right\}$. Идеал I, по определению, выдерживает умножения на элементы из кольца P. То же верно и в фактор-кольце P_J/I_J.

Аксиома Архимеда в нашей конструкции означает, что любую сходящуюся последовательность, которая не сходится к нулю (их мы можем рассматривать как представители соответствующих классов эквивалентности сходящихся последовательностей) можно умножением на конечное натуральное число перевести в другой представитель смежного класса, представляющее большее число. Здесь классы сходящихся последовательностей естественно упорядочены в соответствии с упорядочением действительных чисел, которые они представляют при факторизации. Последовательности, представляющие класс последовательностей сходящихся к нулю, нельзя перевести соответствующим умножением в последовательности, представляющие классы сходящихся последовательностей к не нулевым числам. В идеале I_J классы последовательностей по идеалу J умножением на конечные вещественные числа переходят в классы подобных последовательностей. В расширении $\overline{P_J}$ кольца P_J любой элемент можно перевести умножением, в том числе и на неограниченно большие последовательности, в любой другой элемент кольца $\overline{P_J}$, в частности, элементы из U_J обратимы в $\overline{P_J}$.

4.2.2 Неархимедовость, как свойство определяющее идеал. Начнем с определения идеала не только для кольца (которым мы уже пользовались), но и полукольца (естественно в коммутативном случае).

Определение. Идеалом кольца (полукольца) называется аддитивная абелева группа (аддитивная абелева полугруппа), выдерживающая умножения на элементы кольца (полукольца).

То есть, если K – кольцо (полукольцо), а I – идеал этого кольца (полукольца), то $KI \subset I$.

Аксиому Архимеда обобщим на наш случай: для любых двух числовых (вещественных) последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, сходящихся к конечным вещественным числам $a > 0$ и $b > 0$ соответственно, причем $a < b$, найдется последовательность $\{c_n\}$, сходящаяся к конечному вещественному числу $c > 0$, что произведение ac, к которой сходится произведение последовательностей $\{a_n\}\{c_n\} = \{a_n c_n\}$ будет больше числа b.

Однако, если, например, последовательность $\{a_n\}$, состоящая только из положительных чисел, принадлежит идеалу I (или I_J для факторкольца P_J/I_J), а $\{b_n\}$, сходится к конечному вещественному числу $b > 0$, то аксиома Архимеда не выполняется. Получается, что всякое числовое кольцо, содержащее нетривиальный идеал, не удовлетворяет аксиоме Архимеда. Конечно, множества с операцией умножения, не удовлетворяющие аксиоме Архимеда, не обязаны образовывать кольца или полукольца, однако легко провести параллель между **неархимедовостью и определением идеала**.

Согласно предыдущему пункту, заметим, что множество $\overline{S_J}$ состоит из смежных классов последовательностей по идеалу J, которые в $\bar{P}_J$ – кольце всех последовательностей, также профакторизованном по идеалу J, удовлетворяют аксиоме Архимеда, если в качестве сомножителей можно брать неограниченно большие элементы из $\bar{P}_J$.

Глава 5

Великая потеря математики.

Считается, что $\infty + 1 = \infty$, из чего формально логически следует, что единица здесь по отношению к бесконечности пренебрегается, то есть ничем не отличается от нуля: $\infty + 0 = \infty$. Единица, которой нас одарил Всевышний, утеряна. Попробуем вернуть потерю.

Материя не исчезает
(спасибо физикам за напоминание)

§ 5.1 О пронумерованности «хвоста» натурального ряда

5.1.1 Ленивый Дед Мороз.

Лень – двигатель прогресса
Девиз ленивых (или их оправдание)

В [14] на страницах 10-11 под названием «Дед Мороз и конфеты» описана такая ситуация (процитирую): *На Новый год к детишкам пришел Дед Мороз с мешком конфет. <u>Конфет в мешке бесконечно много, и они занумерованы натуральными числами.</u> <u>На каждой конфете написан ее номер, и для каждого натурального числа есть ровно одна конфета с этим номером.</u> За одну минуту до полуночи Дед Мороз взял конфету №1 и подарил детям. Через полминуты он дал детям конфеты №2 и №3, но при этом конфету №1 забрал. Еще через четверть минуты он дал детям конфеты №4, №5, №6 и №7, но забрал конфеты №2 и №3. И так далее: щедрый Дед Мороз каждый раз дает вдвое больше конфет, чем на предыдущем шаге, и за* $\frac{1}{2^n}$ *мин. до полуночи дает конфеты с номерами* $2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$*, а забирает конфеты с номерами* $2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \ldots, 2^n - 1$*,* *которые сам же дал на предыдущем шаге. При этом количество конфет у детей стремительно возрастает.*

Сколько конфет будет у детей в полночь?

*Давайте разбираться последовательно. У кого будет в полночь первая конфета? У Деда Мороза. А вторая конфета? У Деда Мороза: он забрал ее себе за четверть минуты до полуночи. У кого будет m —я конфета? Если $2^{n-1} \leq m \leq 2^n - 1$, то за $\frac{1}{2^n}$ мин. до полуночи **хитрый** Дед Мороз ее забрал. Итак, каждая конкретная конфета в полночь окажется у Деда Мороза. Что же получается? После каждого шага у детей становится в два раза больше конфет, а в полночь происходит катастрофа?*

На самом деле парадокса тут никакого нет. (Конец цитаты).

Разберем ситуацию, немного видоизменив ее. Пусть Дедушка Мороз будет стареньким, очень **добрым** и слегка ленивым, что не может, не хочет и ему лень забирать конфеты у детей. Он предлагает детям менять номера у конфет соответствующим образом (и Деду Морозу менее обременительно и детям полезно потренироваться в числах), а не заменять конфеты с одними номерами на, в два раза большее число конфет, с другими номерами. Дед Мороз лишь будет добавлять конфеты с нужными номерами, чтобы картина была точно такой же, как и в предыдущем случае. Кроме того, Дед Мороз будет менять соответствующим образом номера конфет и у себя в мешке. Получится, что все конфеты, которые давал добрый Дедушка Мороз, останутся у детей, но они не будут иметь номеров. И у Деда Мороза полный мешок всех номеров с конфетами, и дети получили Новогодний подарок. И в этом, как оказывается, ничего удивительного нет.

Можно возразить, что изначально предполагалось: *Конфет в мешке бесконечно много, и они занумерованы натуральными числами. На каждой конфете написан ее номер, и для каждого натурального числа есть ровно одна конфета с этим номером.* Если все номера и конфеты уникальны, то вроде каждая из них будет в полночь у Деда Мороза. Но номера есть натуральные числа, которые строятся **индуктивно**, а если считать все конфеты пронумерованными, то мы исподволь осуществили предельный переход от неограниченности к бесконечности, что в итоге приведет к противоречию.

5.1.2. Как относиться к методу математической индукции?

Хорошо.

5.1.3. Неупорядоченная бухгалтерия счетной неограниченности.

Если мы считаем, что $\infty + 1 = \infty$, то можно считать, что эта $+1$ не имеет номера, так как мы хотим посчитать его позже всех (здесь мы под знаком бесконечности будем считать счетное неограниченное множество). Действительно, у нас это не получится, так как нет последнего номера, после которого +1 будет посчитана, и поэтому +1 будет оставаться в режиме ожидания, не получая номера. Приведем здесь несколько конструкций и аргументов, позволяющих обоснованно говорить в пользу данного утверждения.

Рассмотрим последовательности $\{n\}$, $\text{где}\, n = 1,2,3, \ldots$ и $\{n\} + 100$. Пусть человек делает шаги, количество которых соответствует последовательности $\{n\}, \text{где}\, n = 1,2,3, \ldots$, а точная его копия на сто шагов впереди делает точно такие же шаги. Будем считать, что они идут (по возможности) по одной прямой. 100 шагов между ними – это инвариант. Как минимум 100 шагов не будут пронумерованы, иначе он догонит свою копию.

Для хитрого Деда Мороза и детишек ситуация выглядела бы так: если у детей изначально было 100 пронумерованных конфет от 1 до 100, а у Деда Мороза неограниченное количество пронумерованных конфет, начиная с номера 101, то предложив забрать 100 конфет, а вместо них подарить 200 (а лучше наоборот, подарить 200 конфет и забрать 100, чтобы у детей всегда было не меньше 100 конфет) и так далее, по процитированной выше схеме, получим следующее. Всякая конфета имеет номер и каждая конкретная (пронумерованная) конфета в полночь окажется у Деда Мороза. Но Дед Мороз, забирая конфеты, никогда не «обнулял» число конфет у детей. Тогда какие номера имеют конфеты, оставшиеся у детей, если их количество никогда не равнялось нулю?

На самом деле, мы можем говорить о том, что ***непронумерованных элементов любого счетно неограниченного множества будет счетно неограниченно****. Фактически это эквивалентно тому, что нет наибольшего натурального числа.* Этому подтверждением является и следующая конструкция.

Подмочить хвостик.

Пусть в воде находится неограниченно длинная веревка со счетно неограниченным количеством узлов. Эту веревку привязываем одним концом (второго не видно – его нет) к вертолету (можно, конечно, и к ракете, но моя мысль за ракетой не успевает), который поднимает ее над водой все выше и выше. Последовательно поднятые над водой узлы веревки будем нумеровать последовательностью натуральных чисел. Узлы под водой не нумеруются. Хвост веревки всегда будет находиться в воде, поэтому всегда есть не пронумерованные члены последовательности, даже если мы задаем правило нумерации.

Когда мы говорим, что пусть это множество (да и сам натуральный ряд) проиндексировано, мы будем иметь в виду, что летит ракета и всякий фиксированный (нужный нам) элемент уже находится над водой (моя же мысль не поспевает за ракетой: я подумал, а нужный узел уже над водой) что не одно и то же с тем, что все узлы уже на поверхности. При факторизации по идеалу I, мы, действительно, осуществляя предельный переход, как бы начинаем считать, что все узлы вышли на поверхность, нивелируя скорости их появления над водой. Факторизуя же по идеалу J, у нас получаются разные хвосты при нумерации, когда летит ракета и, когда летит вертолет, или даже, если скорости, например, у двух вертолетов разные. Просто, считая, что множество пронумеровано, мы должны под этим понимать, что скорость нумерации (раз как бы уже пронумеровано) у «пронумерованного» множества заведомо больше (но не самая большая в абсолюте – таковой не существует) любой другой, рассматриваемой нами в данной задаче, проблеме или данном вопросе. ***Это похоже на универсальное множество, которое содержит все рассматриваемые нами множества или элементы, исходя из смысла задачи.*** Для другой задачи могут понадобиться другие скорости. Здесь также отметим, что если последовательности отражают изменения какого-то процесса, то сравнивая две последовательности, предполагаем **одновременность** появления (фиксации) значений соответствующих одному индексу. Лексикографическое сравнение определяется с точностью до непронумерованных «хвостов». Мы не сравниваем пятый член первой последовательности с сотым членом второй последовательности. Всё это говорит о глубокой связи последовательностей и времени.

Последовательности и время.

Последовательность – после следовать (по следам), то есть последовательности тесно связаны с понятием времени: прошлое настоящее и будущее идут последовательно. Числа, как застывшие картинки или фотографии «оживают» и даже «смазываются», когда их мы рассматриваем как смежные классы последовательностей, и одно число может быть представлено неограниченным количеством представителей соответствующего класса, которые между собой отличаются на «хвост» неограниченно малой последовательности. Ненулевое расстояние, например, между двумя точками, требует ненулевого количества времени для преодоления этого расстояния, а последовательности зачастую описывают как раз движение.

Метод математической индукции вполне согласуется с пошаговым построением натурального ряда, – все рассуждения только для <u>конечных</u> натуральных чисел и, никаких <u>бесконечностей</u> в такого рода рассуждениях нет, просто количество таких рассуждений нельзя ограничить никаким конечным числом.

Теперь применим метод математической индукции для доказательства утверждения: ***непронумерованных элементов любого счетно неограниченного множества – счетно неограниченно***, при любом способе нумерации.

Как записывать число π

Копи терпение, копи
И выпиши число как есть
Чтоб на вопрос: А где же π?
Ответить мог – Ну все, π здесь!

Общество любителей $\frac{2\pi}{9}$ градусов

Опять нас заПИгали – ПИ, ПИ,ПИ, …

ПИгалицы

Пусть дано счетно неограниченное множество чего-то математического, например, числа π: $\pi, \pi, \pi, \dots, \pi, \dots$. Составим неограниченную последовательность утверждений $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$, где P_i – утверждение, что при i ($i = 1,2,3, \dots$) пронумерованных элементах любого счетного множества, непронумерованных элементов будет счетно неограниченно. **База индукции**: при $n = 1$, утверждение P_1 верно, то есть в случае, когда номер получил только один элемент, оставшееся непронумерованное множество, очевидно, счетно неограниченно. **Предположение индукции**: пусть при $n = k$, утверждение P_k истинно, то есть, когда пронумерованы k чисел π, оставшееся (непронумерованное) множество – счетно неограниченно. **Шаг индукции**: докажем теперь, что при $n = k + 1$, – непронумерованных элементов множества будет счетно неограниченным. Действительно, в условиях предположения индукции, одному из непронумерованных чисел π, дадим номер, но тогда оставшееся множество непронумерованных чисел π останется счетно неограниченным. **Вывод**: Все утверждения последовательности верны.

Утверждений последовательности счетно неограниченно и, значит, эквивалентно счетно неограниченной последовательности $\{n\}$.

Возвращаясь к Дедушке Морозу, если мы уберем какое-либо конечное число непронумерованных конфет, то ничего страшного не произойдет, можно обойтись и без них. Более того, можно получить счетно неограниченное множество непронумерованных конфет у доброго Дедушки Мороза (как это получилось у ребят и Дедушки Мороза). Возникает вопрос: все ли конфеты из мешка прошли через руки детей? На самом деле счетно неограниченные множества, как мы убедились, определяются лишь с точностью до счетно неограниченного количества. Всегда остается «хвост». Поэтому у Дедушки Мороза в мешке всегда остается счетно неограниченное множество конфет, какое бы конечное количество конфет он не дарил детям, неограниченное количество раз.

Представим еще один аргумент. Будем делить единичный отрезок на n равных частей, и параллельно, вместе с каждым n, такой же отрезок будем делить на 2^n равных частей, $n = 1,2,3, \dots$. Считая, что мы исчерпали все возможности деления на всевозможные натуральные n, получаем, что, деление на 2^n принимает по Кантору большую мощность, чем счетная. Грубо говоря, при $n \to \infty$ степень двойки стремится к несчетной мощности $2^n \to 2^\infty$. И, если считать, что вместе с исчерпыванием всех возможностей деления на всевозможные натуральные n, мы исчерпали, в том числе, всевозможные деления на 2^n (так как все степени двойки являются натуральными числами), то получается, что и 2^∞ – также счетно. **Еще раз:** исчерпывание $n = 1,2,3, \dots$ означает, что и все натуральные степени двойки, которые лежат в том же ряду, также исчерпываются. А так как натуральный ряд счетно неограничен, то и двойка в счетно неограниченной степени, так же счетно неограниченна. **По-другому**, последовательность $\{n\}$ содержит подпоследовательность вида $\{2^n\}$: $1, \mathbf{2^1}, 3, \mathbf{2^2}, 5, 6, 7, \mathbf{2^3}, \dots, n, \dots \mathbf{2^n} \dots$. Неограниченное возрастание общего члена последовательности $\{n\}$ приводит к тому, что внутри последовательности возникает переходное состояние в виде $\{2^n\}$, которое стремится по классификации (см.6.2.1) к более высокой степени неограниченности, недосягаемое последовательностью $\{n\}$. Здесь заканчиваются возможности счета, которые нам дает натуральный ряд и всегда можно считать, что «хвост» не пронумерован. В противном случае мы прямым ходом летим в противоречие. *Это как бы наказание Всевышнего за посягательство на бесконечность, которая является только Его прерогативой.* Считая, что-либо (не конечное) перенумерованным (законченным процессом индексации числами натурального ряда), мы автоматически получаем множество (внутри счетного по Кантору), которое Кантор определил как несчетное (см. Классификацию неограниченностей, 6.2.1). В связи с этим интересно рассмотреть следующее. Еще один аргумент.

Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ обратна последовательности натуральных чисел, все члены последовательности, убывая, являются строго положительными числами. Согласно приведенным выше рассуждениям, «хвост» последовательностей не может быть пронумерован. Повторюсь, здесь он не может начаться с $\frac{1}{n}$ ни при каком n (где n одновременно и индекс члена $\frac{1}{n}$), а индексируются только они, это означает, что члены «хвоста» не могут иметь индекса, то есть, их нельзя считать пронумерованными. Но тогда (опять же) и последовательность $\{n\} = (1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$ имеет непронумерованный «хвост». Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ необратима в кольце P, так как

$\{n\} \notin P$, но $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ обратима, например, в аддитивной абелевой полугруппе $P \cup U^{-1}$, с частичной операцией умножения. Получается, что в кольце P последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и любая последовательность, сходящаяся к $a \neq 0$, не удовлетворяют аксиоме Архимеда, поэтому $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ как бы пропадает в факторкольце P/I, так как при факторизации $\left\{\frac{1}{n}\right\} \in [0]$. В этом случае, оправдывая «пропадание», максимум, что мы можем считать – это правомерность использования понятия общего члена последовательности, за которым следует счетно неограниченное множество членов этой же последовательности. Другими словами, мы можем задать правило построения последовательности, но не саму последовательность. Лексикографическое сравнение двух последовательностей, определяющее их равенство возможно лишь с точностью до непронумерованных членов. Точнее, с точностью до «хвоста», который не имеет определенного начала, а поэтому то, что находится в «хвосте» не может иметь определенных номеров.

На самом деле, с учетом рассуждений про ленивого Деда Мороза, что кроме конечных шагов, несмотря на их неограниченность, всегда есть «неучтенка», в которой **нет упорядоченности**, иначе нарушилась бы непрерывность. Действительно, 24-00 и 00-00 – это одно и то же? И чему принадлежат показания этого времени: предыдущим или следующим суткам? С учетом непрерывности времени (время будем считать непрерывным), эти показания (или это показание) должны связывать эти сутки, то есть принадлежать обоим суткам одновременно, а, значит, быть сразу больше и меньше себя, даже равно себе. Точка на прямой, как класс последовательностей, сходящихся к одному и тому же значению, вполне соответствует конструкции непрерывности времени, так как в этом классе есть двусторонние сходящиеся последовательности. Они как бы переплетают непрерывно соединенные части.

Эти рассуждения про 24-00 и 00-00, как раз показывают, что упорядоченности вне натурального счета нет, и неупорядоченность не нумеруется, так как это значение времени (и любое другое) одновременно находится в трех состояниях – в прошлом, настоящем и будущем – осуществляя, таким образом, непрерывность пространства и времени.

Неупорядоченность проявляется в том, что как только у члена в последовательности, приближающейся к 24-00, есть индекс, значение соответствующее этому члену будет находиться в предыдущих сутках. Последовательность от слова последовательно, но действительные числа не расположены (дискретно) последовательно на прямой, несмотря на линейный порядок, – нет последовательных действительных чисел идущих один за другим без пропусков других чисел. У этих чисел нет непосредственных предыдущего и нет последующего, как например, у целых чисел. Всякая сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ вещественных чисел – это набор расположенных на конечном расстоянии друг от друга значений. Каждая из них не может описывать непрерывное движение, – только совокупность всевозможных «хвостов» сходящихся последовательностей кольца P_J наиболее близко описывает непрерывность.

А был ли мальчик? —

широко распространённая фраза из романа
Максима Горького «Жизнь Клима Самгина».

Представим себе последовательность $\text{м}, \text{д}_1\text{м}, \text{д}_1\text{д}_2\text{м}, \ \dots \ , \text{д}_1 \dots \text{д}_n\text{м}, \ \dots,$ где м – означает мальчик, д – девочка. Каждый раз перед мальчиком ставим девочку и присваиваем ей номер, который не изменяется в следующих членах. Мальчик присутствует во всех членах последовательности, в первом члене у него номер 1, во втором – 2, и так далее, в «хвосте» мальчик натурального номера не получит, так как он должен был бы получить самый большой номер, а самого большого натурального числа нет. Поэтому мальчик в «хвосте» последовательности $\text{м}, \text{д}_1\text{м}, \text{д}_1\text{д}_2\text{м}, \dots \ , \text{д}_1 \dots \text{д}_n\text{м}, \dots$ есть, но его нельзя посчитать, так как какой бы натуральный индекс мы не взяли, – он будет присвоен девочке. Но тогда и некоторые девочки тоже не получат номера, например, если пару (дм) считать как за одного человека. Если теперь из пары (дм) убрать м, то получается, что и последовательность, состоящая только из одних девочек, также содержит девочек, не имеющих натурального номера.

Теперь посмотрим, что происходит в поле вещественных чисел R и в фактор-кольце P_J/I_J, в чем их различия и совместимость. В поле вещественных чисел R десятичная запись числа $1 = 0,(9)$ вполне корректна (они в одном смежном классе, представляющем единицу при соответствующем изоморфизме). В фактор-кольце P_J/I_J же запись $0,(9)$ не корректна, потому, что интерпретировать эту запись можно только смежным классом последовательностей по идеалу J, представленным одной из последовательностей с неограниченным количеством девяток после запятой, например, $(0; 0{,}9; 0{,}99; \dots)$. «Хвост» последовательностей этого смежного класса, состоит из чисел вида $0{,}9 \dots 9$, где количество девяток неограниченно в совокупности, но каждый раз конечно, хотя и носит неопределенный характер. Если условиться допустить запись $0,(9)$, то эта совокупность не содержит числа с такой записью. Допущение такой записи приведет, как в примере с мальчиком к следующему: если каждую девочку заменить на цифру 9, а мальчика на цифру 7, и формально приписать ко всем членам последовательности целую часть «0», то, так как только девочки получили номера, в записи будут только девятки после запятой, а семерку (мальчика) мы так и не увидим. Запись типа $0,(9)7$ означает, что во всех разрядах стоят девятки, а семерка «после» них. То есть, если находиться в поле вещественных чисел, как в поле представителей смежных классов кольца сходящихся последовательностей по идеалу, то мы теряем возможность проследить за тем, что происходит внутри этих смежных классов. Например, для определения непрерывности необходимы последовательности или эквивалентный подход «δ-ε»-окрестностей, то есть мы опять пытаемся воссоздать идеалы и смежные классы. В нашем же случае, мальчик всегда присутствует в «хвосте» и, не имеет определенно заданного номера, так же, как и начало «хвоста», поэтому считается непронумерованным.

Кстати, запись типа $0,(9)7$ (если ее допустить) формально не является числом с периодом в десятичной записи, то есть формально отличается от рационального. Периодичность числа нарушается, поэтому иррациональных чисел «больше» рациональных чисел. Действительно, записывая какое-нибудь число $0{,}34813022$ ..., после каждой очередной цифры, есть десять возможностей написать следующую и можно сделать это число периодическим, но гораздо больше возможностей нарушать любую периодичность.

Откровения банкира

Кредитная история. Взял кредит, чтоб расплатиться с предыдущим кредитом, и – так неограниченное количество раз – все равно на тебе есть открытый кредит. Непонятно какой по счету, но есть! При неограниченном процессе он потеряет номер, так как какой по номеру кредит ни возьми, - он закрыт следующим. И, если бы открытого кредита не стало, то какой-то из предыдущих кредитов был бы не закрыт. До этого мы рассуждали так: нет номера кредита – нет и кредита!

И, последний и главный аргумент – просто поверьте мне, я это чувствую.

§ 5.2 Найденная потеря

5.2.1 Отель Гильберта. Пусть у нас имеется счетное неограниченное количество одинаковых (непронумерованных) единиц. Если мы уберем несколько единиц так, чтобы визуально после этого мы не могли отличить оставшиеся единицы от какой-либо их перестановки в расположении, то можно ли установить пропажу? Нет. Если у нас имеется два множества счетно неограниченного количества, то можно ли их как-нибудь сравнить? Разве что установить их принадлежность одному классу мощности.

Пусть в заполненный отель Гильберта (см. [14]), в котором все комнаты (будем так их называть) пронумерованы (то есть, какую бы фиксированную комнату мы не взяли, она будет пронумерована), пришел еще один клиент. Пусть все клиенты отеля абсолютно **одинаковы.** Можно, конечно, рассмотреть ящики и одинаковые шары. По схеме Гильберта пришедший клиент идет в комнату №1, но так как все клиенты одинаковы, житель комнаты №1 предлагает не меняться местами, все равно ничего от этого не измениться (в принципе могут и поменяться) и идти дальше в комнату №2. Житель второй комнаты также не видит смысла в своем выселении, и просит пройти пришедшего клиента дальше. И так далее … . Клиент не будет заселен. Этот или другой, но абсолютно такой же клиент не получает номера, если считать, что каждый клиент имеет номер комнаты, в которой проживает, а это означает, что он не будет заселен. Конечно, можно представить, что все клиенты разом переселились в следующую соседнюю, освободив, таким образом, первую комнату. Откуда взялась еще одна комната? Судя по всему из «неучтенки». Либо какой-то из клиентов становится безномерным, либо есть безномерные комнаты, которым можно давать номер. На самом деле можно варьировать и тем и этим. Действительно, фиксируя исходное состояние, где на каждом конечном начальном отрезке, номера переходят сами в себя, после сдвига на единицу, имеем, что вместо первого теперь требуется пополнение, - номер, которого в начальном отрезке не было.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$k \leftrightarrow k+1$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$$7 \notin \{1,2,3,4,5,6\}$$

Семерка не принадлежит исходному множеству, движение идет туда, где не были. И так каждый раз, для каждого начального отрезка. За счет чего происходит пополнение? За счет «резерва» из не пронумерованных хвостов. Неограниченность процесса такого пополнения лишь завуалировала постоянную нехватку комнаты на каждом конечном шаге или для каждого конечного начального отрезка.

Пусть теперь все клиенты **разные** и пронумерованы одинаково с номерами комнат, в которых проживают. Теперь появился смысл переселяться по схеме Гильберта. Изначально, отношение номеров клиентов и номеров комнат, в которых они проживают, равны одному. После переселений, каждый, кроме пришедшего клиента получает номер комнаты на единицу большую, чем было: $n \to n+1$. Тогда отношение номеров комнат и номеров клиентов становится другим: $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Это уже другой «хвост» соответствующей последовательности, особенно, если учесть второй замечательный предел. Что-то произошло и это видно, хотя мы практически к счетной бесконечности прибавили единицу, то есть равенство $\infty + 1 = \infty$ скорее уже не равенство, а эквивалентность, особенно, если относиться не как к мощности, как таковой, а как к внутренним изменениям системы, в которой что-то добавилось несоизмеримо малое по отношению к тому, что было. Эти изменения не вносят изменений в числовой характер напрямую, так как последовательности $\{1\}$ и $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ принадлежат одному смежному классу по идеалу I, но представляют, как уже говорилось, разные «хвосты» по идеалу J.

Теперь разберемся с пустующей комнатой. Пусть комната №1 пуста, а начиная с номера №2 все комнаты отеля Гильберта заняты клиентами. Если, как и выше, первоначально номера клиентов и комнат совпадают (чтобы зафиксировать первоначальное состояние, иначе не проследить за изменениями), то каждый перейдет в комнату с номером на единицу меньшую, чем номер клиента. То есть $n \to n - 1$. Тогда отношение номеров комнат и номеров клиентов становится: $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. При $n \to \infty$ отношение $\frac{1}{n}$ стремится к нулю и $1 - \frac{1}{n} \to 1$, что соответствует факторизации по идеалу I, где последовательности $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ и $\{1\}$ лежат в одном смежном классе. Рассуждения Гильберта как раз соответствуют этому случаю, то есть для поля вещественных чисел. То есть фактически, рассуждения Гильберта соответствуют факторизации кольца P по идеалу I, или, что то же самое, осуществлению предельного перехода. Однако при факторизации по идеалу J, последовательности $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ и $\{1\}$ представляют разные «хвосты», а значит, различаются, но не в поле, а в кольце P_J. *Волны невидимых движений происходят за пределами числовых величин, или внутри смежных классов.* Таким образом, найдена потеря, которой одарил нас Всевышний, которая затерялась была в океане неограниченностей.

В связи с рассмотренным выше, в главе 7 будет переосмыслен парадокс Банаха-Тарского и парадокс стрелы Зенона Элейского.

Глава 6

Степенное квазиподобие. Классификация и арифметика неограниченностей

§ 6.1 Поле вещественных чисел и вещественная прямая

6.1.1 Определения степени и логарифма последовательностей.

Нижеследующие определения сначала дадим для произвольных числовых (с вещественными членами) последовательностей из $\bar{P}$, не обязательно сходящихся, рассматривая кольцо P, как подкольцо кольца $\bar{P}$. Далее, используя эти определения, дадим аналогичные для элементов факторкольца $\bar{P}_J$, которое в качестве подкольца содержит факторкольцо P_J. Элементы факторкольца P_J, в свою очередь, являются выделенными в факторкольце P_J/I_J.

Определение 1. *Определим степень для последовательностей $\{a_n\}$, которые содержат лишь конечное число неположительных членов следующим образом: $\{a_n\}^\mu = \{\widetilde{a_n}\}^\mu = \{\widetilde{a_n}^\mu\}$, где μ – произвольное вещественное число, $\{\widetilde{a_n}\}$ состоит только из положительных вещественных чисел и отличается от последовательности $\{a_n\}$ лишь в конечном числе членов.*

Определение 2. *В условиях определения 1, определим теперь степень элементов $(\{a_n\} + J)$ факторкольца $\bar{P}_J$: $(\{a_n\} + J)^\mu = \{a_n\}^\mu + J$.*

Теорема. *Пусть $\{\widetilde{\propto_n}\}$ – произвольная последовательность из $\widetilde{U}$. Тогда для любых вещественных чисел $\mu \neq \vartheta$, две последовательности $\{\widetilde{\propto_n}\}^\mu$ и $\{\widetilde{\propto_n}\}^\vartheta$, не мультипликативно квази(подобны) ни с каким конечным вещественным коэффициентом $k \neq 0$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть отношение этих последовательностей-степеней: оно, либо равно последовательности, сходящейся к нулю, либо равно неограниченно большой положительной последовательности.

Как следствие, то же верно и для выделенных элементов факторкольца P_J/I_J, которым принадлежат последовательности $\{\widetilde{\propto_n}\}^{\mu}$ и $\{\widetilde{\propto_n}\}^{\vartheta}$.

Определение 3. *В условиях определения 1, определим операцию возведения последовательности в <u>степень-последовательность</u>:* $\{a_n\}^{\{b_n\}} = \{\widetilde{a_n}\}^{\{b_n\}} = \left\{\widetilde{a_n}^{b_n}\right\}$*, где последовательность* $\{b_n\} \in \bar{P}$*.*

Очевидно, что если предел последовательности $\{a_n\}$ равен конечному вещественному числу $a > 0$, а $\{b_n\}$ равен b, то $\{{a_n}^{b_n}\}$ сходится к a^b.

Аналогично, на элементах из P_J:

Определение 4. *В условиях определения 3, определим операцию возведения элементов* $(\{a_n\} + J)$ *в степень-последовательность элементов* $(\{b_n\} + J)$ *факторкольца* P_J*:* $(\{a_n\} + J)^{\{b_n + J\}} = \{a_n\}^{\{b_n\}} + J$*.*

Операция возведения последовательностей в степень и степень-последовательность, в кольце P, а значит и в факторкольцах P_J и P_J/I_J является частичной, – не всегда в результате операции получается элемент, принадлежащий этим (фактор) кольцам. Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}^{\{-1\}} = \{n\}$, не является сходящейся, являясь неограниченно большой, принадлежит $\bar{P}$.

Определение 5. *Логарифмом последовательности* $\left\{\widetilde{b_n}\right\} \in \bar{P}$*,* $\widetilde{b_n} > 0$ *по основанию последовательности* $\{\widetilde{a_n}\} \in \bar{P}$*,* $\widetilde{a_n} > 0$*,* $\widetilde{a_n} \neq 1$ *при* $n = 1,2,3, \ldots$ *, называется степень-последовательность* $\{c_n\} \in \bar{P}$*, в которую нужно возвести последовательность* $\{\widetilde{a_n}\}$*, чтобы получить последовательность* $\left\{\widetilde{b_n}\right\}$*, и обозначается* $log_{\{\widetilde{a_n}\}}\left\{\widetilde{b_n}\right\} = \{c_n\}$*.*

Если последовательности $\{b_n\}$ и $\{a_n\}$ содержат лишь конечное число неположительных членов и $\{a_n\}$ содержит конечное число единиц, то перейдя к последовательностям $\left\{\widetilde{b_n}\right\}$, $\widetilde{b_n} > 0$ и $\{\widetilde{a_n}\}$, $\widetilde{a_n} >$

0, $\widetilde{a_n} \neq 1$, которые отличаются от исходных лишь в конечном числе членов, соответственно, можно определить $log_{\{a_n\}}\{b_n\} = log_{\{\widetilde{a_n}\}}\{\widetilde{b_n}\} = \{c_n\}$.

Аналогично в $\bar{P}_J$: $log_{\{\bar{a}_n\}}\{\bar{b}_n\} = log_{\{a_n+J\}}\{b_n + J\} = log_{\{a_n\}}\{b_n\} + J = \{c_n\} + J$

В отличие от логарифма в поле вещественных чисел R, здесь логарифм $\log_{\{a_n\}}\{b_n\} = \{c_n\}$ не всегда является сходящейся последовательностью (принадлежит P), даже, если $\{b_n\}$ и $\{a_n\}$ являются сходящимися. Например, если последовательность $\{a_n\} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^4}; \dots\right)$, а $\{b_n\} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2; \left(\frac{1}{2^2}\right)^3; \left(\frac{1}{2^3}\right)^2; \left(\frac{1}{2^4}\right)^3; \dots\right)$, то $\log_{\{a_n\}}\{b_n\} = \{c_n\} = (2; 3; 2; 3; \dots)$. Или, когда последовательности не сходятся к нулю: если $\{a_n\} = \left(1 - \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{2^2}; 1 - \frac{1}{2^3}; 1 - \frac{1}{2^4}; \dots\right)$, $\{b_n\} = \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2; \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^3; \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)^2; \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)^3; \dots\right)$, то $\log_{\{a_n\}}\{b_n\} = \{c_n\} = (2; 3; 2; 3; \dots)$. Но если $\{a_n\}$ стремится к конечному вещественному числу $a, a > 0, a \neq 1$, а $\{b_n\}$ – к $b, b > 0$, то $log_{\{a_n\}}\{b_n\} = \{c_n\}$ является сходящейся последовательностью с пределом $log_a b$.

Обозначим через $S_{\bar{1}} \in S_+ \subset P$ последовательности из S_+, которые содержат конечное число единиц. Следующие определения дадим, находясь в факторкольце P_J.

Определение 6. *Элемент $\{\bar{a}_n\} = \{a_n\} + J \in P_J, \{a_n\} \in S_{\bar{1}}$ называется степенно подобным элементу $\{\bar{b}_n\} = \{b_n\} + J \in P_J$, если $\{\bar{a}_n\}^{\{\bar{k}_n\}}$ мультипликативно подобен $\{\bar{b}_n\}$ с коэффициентом равным 1, при некотором $\{\bar{k}_n\} \in P_J$ или $log_{\{\bar{a}_n\}}\{\bar{b}_n\} = \{\bar{k}_n\}$.*

Определение 7. *Элемент $\{\bar{a}_n\} = (\{a_n\} + J) \in P_J, \{a_n\} \in S_{\bar{1}}$ называется степенно квазиподобным элементу $\{\bar{b}_n\} = (\{b_n\} + J) \in P_J$, если $\{\bar{a}_n\}^{\{\bar{k}_n\}}$ мультипликативно квазиподобен $\{\bar{b}_n\}$ с коэффициентом равным 1, при некотором $\{\bar{k}_n\} \in P_J$ или $log_{\{\bar{a}_n\}}\{\bar{b}_n\} \in [\{\bar{k}_n\}]$.*

Определение 8. *Подмножество элементов* $M \subset P_J$ *называется не степенно архимедовым по отношению к подмножеству элементов* $L \subset P_J$*, если* $log_{\{\bar{a}_n\}}\{\bar{b}_n\}$ *определен в* $\overline{P_J}$ *для всех* $\{\bar{a}_n\} \in M$ *и* $\{\bar{b}_n\} \in L$ *и* $log_{\{\bar{a}_n\}}\{\bar{b}_n\} \notin P_J$.

Теорема 1. *Подмножество* $M \subset P_J$*, которое состоит из* $\{\bar{a}_n\} \in M$*, где* $\{\bar{a}_n\} = \{a_n\} + J \in P_J, \{a_n\} \in S_{\bar{1}} \setminus U$ *(разность множеств) не степенно архимедово по отношению к подмножеству* $L \subset P_J$*, которое состоит из* $\{\bar{b}_n\} \in L$*, где* $\{\bar{b}_n\} = \{b_n\} + J \in P_J, \{b_n\} \in U$.

Доказательство. Пусть $\{\bar{a}_n\} \in M$, $\{\bar{b}_n\} \in L$. Тогда $log_{\{\bar{a}_n\}}\{\bar{b}_n\} = \{c_n\} \notin P_J$, так как, если $\{\bar{a}_n\}$ класс последовательностей по идеалу J сходящихся к a, где $0 < a$, то $\{c_n\}$ является:

либо неограниченно большой положительной последовательностью (когда $0 < a < 1$, или когда $a = 1$ и $\{a_n\} < \{1\}$, за исключением, быть может, конечного числа членов),

либо неограниченно большой отрицательной последовательностью (когда $a > 1$ или когда $a = 1$ и $\{a_n\} > \{1\}$, за исключением, быть может, конечного числа членов),

либо неограниченно большой последовательностью, не являющейся неограниченно большой последовательностью одного знака (когда $a = 1$ и неограниченное количество членов последовательности, как больше, так и меньше единицы). Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Множество элементов* $\{\bar{a}_n\} \in M$*, где* $\{\bar{a}_n\} = \{a_n\} + J \in P_J, \{a_n\} \in S_{\bar{1}}$ *и которые представляют смежный класс* $([1] + J)$ *в* P_J *(сходятся к единице), не степенно архимедово по отношению к множеству элементов* $S_J \setminus ([1] + J)$ *(множество элементов* S_J *без смежных классов по идеалу J, сходящихся к единице).*

Доказательство. Пусть $\{\bar{a}_n\} \in M$, $\{\bar{b}_n\} \in S_J \setminus ([1] + J)$. Тогда $log_{\{\bar{a}_n\}}\{\bar{b}_n\} = \{c_n\} \notin P_J$. Действительно, так как $\{\bar{a}_n\}$ сходится к 1, то $\{\bar{a}_n\}$ и в любой степени-последовательности $\{c_n\} \in P_J$ будет сходиться к единице, но по условию $\{\bar{b}_n\}$ не может иметь предел равный единице. Теорема доказана.

6.1.2 О непрерывности в поле вещественных чисел R. Рассмотрим поле вещественных чисел R, представляя каждое вещественное число a стационарной последовательностью $\{a\}$. Определим множество $R^{\{n\}} = \left\{\{a\}^{\{n\}} = \{a^n\} \,|n = 1,2,3, \dots\right\}$. В итоге, для неотрицательных вещественных a, получаем четыре вида последовательностей:

$$\{a^n\} = \begin{cases} \text{стационарная последовательность } \{0\}, & \text{если } a = 0 \\ \text{неограниченно малая положительная последовательность, если} & 0 < a < 1 \\ \text{стационарная последовательность } \{1\}, & \text{если } a = 1 \\ \text{неограниченно большая положительная последовательность,} & \text{если } a > 1 \end{cases}$$

Последовательностей, сходящихся к конечным вещественным числам, кроме нуля и единицы не оказалось. Произошел разрыв.

Комментарий. Неопределенность вида 1^∞ — это всего лишь обозначение неоднозначности, которая возникает при нахождении предела. В данном случае такой неоднозначности нет. Например, $\lim\limits_{n\to\infty} (1)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x}{x}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x^n}{x^n}\right) = 1.$

Пора распушить хвост

Павлин в особый период

Аналогичную конструкцию рассмотрим для факторкольца P_J/I_J:

$$\left(P_J/I_J\right)^{\{n\}} = \left\{\left\{(a_n + J) + I_J\right\}^{\{n\}} = \left\{((a_n)^n + J) + I_J\right\} |n = 1,2,3, \dots\right\}$$

Рассмотрим также, смежный класс по идеалу I_J, в котором смежные классы по идеалу J (выделенные элементы) представляются «хвостами» последовательностей, сходящимися к единице, то есть: $(\{a_n\} + J) + I_J$, где $\{a_n\}$ сходятся к единице. В частности, стабилизирующимися последовательностями $\{1\} + J$. Выделенный элемент $(\{1\} + J) + \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} + J\right) = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\} + J$ также представляет единицу факторкольца. По второму замечательному пределу $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}^{\{n\}} + J = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} + J \in [e] + J$, где $[e]$ обозначает класс последовательностей, сходящихся к числу Эйлера e. Откуда $\left\{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n\right\} + J \in [e^\alpha] + J$, α – вещественное число. Таким образом, для любого положительного вещественного числа b, найдется такое вещественное число α, что $\left\{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n\right\} + J \in [b] + J$. Разрыва, который произошел в поле вещественных чисел, здесь не произошло. Но мы находимся в нашем факторкольце, поэтому, рассматривая вместо $\left\{\frac{\alpha}{n}\right\}$, всевозможные последовательности $\left\{\frac{\alpha_n}{n}\right\}$, где $\{\alpha_n\}$ – последовательности, сходящиеся к произвольным вещественным числам, мы получим всевозможные последовательности, составляющие все классы выделенных элементов, представляющие положительные числа: $\left\{\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n\right\}+J$. Точку, представляющую единицу, удалось «растянуть» на положительную полуось вещественной прямой, которую мы интерпретировали как наше факторкольцо. Это опять подтверждает то, что точка есть отрезок неограниченно малой длины. Остальные последовательности, сходящиеся к $a \neq 1$ в неограниченной степени $\{n\}$, будут принадлежать либо классу $[0]$, либо станут неограниченно большими. Говорить о непрерывности поля вещественных чисел можно лишь с точностью до факторизации. Когда хотели показать непрерывность функции в точке, то рассматривали сходящиеся последовательности или «движение» переменной x к x_0 или стремление приращения $\Delta\, x$ к нулю – так или иначе, пытаясь восстановить (заполнить) «пробелы» между вещественными числами. Само **непрерывное** «движение» $x \to x_0$ (именно непрерывное) не описывалось, и что под этим понимать – тоже. Это было интуитивное понятие. Думалось, что оно «движется» непрерывно, но тогда определение непрерывной функции описывается через не описанное понятие **непрерывного** «движения» $x \to x_0$ или стремления $\Delta x \to 0$. Если брать функцию $f(x) = x$, то получается, что «стремление» $x \to x_0$ и есть непрерывность этой функции в точке x_0, а, значит и непрерывное «движение» самого x. Но всякое такое движение упирается в парадоксы Зенона Элейского. Определение непрерывной функции, данное в 4.1.1, позволяет избежать такие коллизии. Теперь понятна суть парадокса летящей стрелы, который (парадокс) будет рассмотрен в следующей главе.

6.1.3 Вещественная прямая и факторкольцо P_J/I_J. Наиболее подходящим для описания непрерывной вещественной прямой является факторкольцо P_J. Однако, нам удобно рассматривать факторкольцо P_J/I_J, которое изоморфно полю вещественных чисел и обращаться с ним как с множеством «хвостов» сходящихся последовательностей (кольцо P_J), разбитое на смежные классы по идеалу I_J (собственно факторкольцо P_J/I_J), с выделенными элементами $\{a_n\}+J$ из P_J (смежные классы по идеалу J кольца P). Для всех выделенных элементов, не принадлежащих идеалу I_J, определена операция деления. В идеале I_J операция деления является частичной, так как деление определено лишь для некоторых пар выделенных элементов из идеала I_J, представляющего в факторкольце смежный класс соответствующий вещественному числу ноль при естественном изоморфизме. В поле вещественных чисел деление на ноль невозможно. Поэтому, чтобы задать производную, приходилось рассматривать предел отношения приращения функции к приращению аргумента, причем приращение аргумента фактически должно быть меньше любого вещественного числа. Этот классический пример, который рассматривался Эйлером (см. [8] с.172-173), мы не можем обойти. Пусть $y = x^2$, вычислим производную этой функции. Для любого $x \in R$ рассмотрим соответствующий смежный класс $[x] \in P_J/I_J$, согласно изоморфизму из главы 2. Для каждой последовательности $\{\widetilde{\propto_n}\}$ из $\widetilde{U}$ и для любой последовательности $\{x_n\} \in [x]$ имеем: $\frac{\{x_n \pm \widetilde{\propto_n}\}^2 - \{x_n\}^2}{\{\pm\widetilde{\propto_n}\}} = \frac{2\{x_n(\pm\widetilde{\propto_n})\} + \{\widetilde{\propto_n}\}^2}{\{\pm\widetilde{\propto_n}\}} = \frac{2\{x_n\}\{\pm\widetilde{\propto_n}\} + \{\pm\widetilde{\propto_n}\}^2}{\{\pm\widetilde{\propto_n}\}} = 2\{x_n\} + \{\pm\widetilde{\propto_n}\} = \{2x_n \pm \widetilde{\propto_n}\} \in [2\{x_n\}] = 2[x]$, что согласно тому же изоморфизму соответствует $2x$.

Как расположены рациональные числа (места, ядра) на отрезке $[0;1]$ (BD)? Рассмотрим ***(все)*** рациональные точки на отрезке BC ($[0;2]$) ***(пока будем считать, что такое возможно)*** и соединим их лучами с точкой A (см.рис.1). Причем средняя линия MN (такой же отрезок как и $[0;1](BD)$) треугольника ABC пересечена этими лучами в (**во всех**) рациональных числах. Действительно, в силу подобия с коэффициентом 2, для любого рационального числа $a \in [0;1], (\text{на } MN)$, число $2a \in [0;2], (\text{на } BC)$ – также будет рациональным, и обратно с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

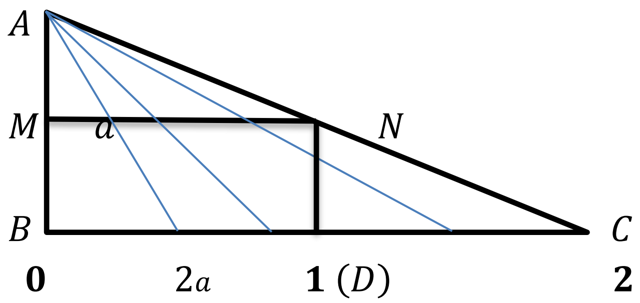


Рис. 1

Теперь через полученные рациональные числа, лежащие на отрезке MN (отрезок $[0; 1]$) на основание BD, параллельно AB проведем лучи. Теперь числу a (на MN) соответствует число a (на BD) (см.рис.2).

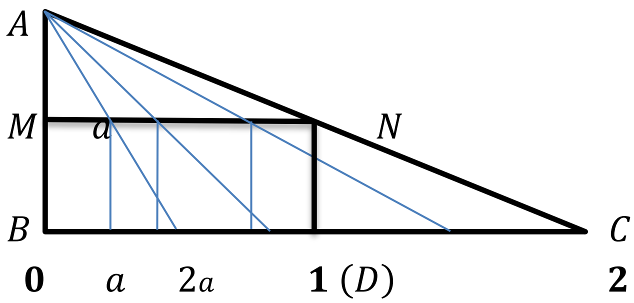


Рис. 2

Во втором случае расположение рациональных чисел на отрезке BD будто бы плотнее в два раза, чем в первом, несмотря на то, что на отрезке BC, а значит, и BD мы рассматривали ***(как бы все)*** рациональные числа. Действительно, теперь на отрезке BD, «уложены» (кроме тех, что на MN соответствуют значениям отрезка BD) еще и те рациональные значения, на MN, которые соответствуют значениям отрезка DC. И этот процесс можно неограниченно продолжать, рассматривая далее, например, то же самое в треугольнике ABD, при этом рациональные значения будут неограниченно уплотняться.

На самом деле, рациональных чисел, как и натуральных, счетно неограниченно (счетно бесконечно по Кантору) и, если один за минуту (за единицу времени, устанавливающую одновременность или равные промежутки времени) считает до ста, а другой, к примеру, до двухсот, то оба дойдут до тысячи (если не ограничивать во времени), но второй в два раза быстрее. В обоих случаях, какое бы рациональное число не было задано на нашем отрезке, оно появится, но где-то раньше, где-то позже, если сравнивать процессы построения по шагам. Если считать, что **все** рациональные числа на отрезке уже построены, то получим **противоречие**, как с натуральными числами (глава 1). Мы их можем строить (как и натуральный ряд), но тогда существенен процесс построения (сходящиеся итерационные процессы, см. главу 3). Мы лишь можем считать, что какое бы рациональное число мы не взяли, оно у нас есть (или будет). Все это согласуется и с тем, что идеал сходящихся к нулю последовательностей с рациональными членами, инвариантен относительно умножения на любое конечное рациональное число, в том числе и на 2, хотя сами последовательности внутри идеала изменяются умножением на этот коэффициент, переходя в подобные себе последовательности.

Комментарий. Во всех этих построениях незримо возникает время, потому что, как только появляется процесс, а это некоторое движение, то требуется определять предыдущее и последующие состояния (возникает прошлое, настоящее и будущее).

Теперь, отвечая на вопрос: «Как же все-таки расположены рациональные числа (места, ядра) на отрезке $[0;1]$ (BD)?», можем ответить, что нет окончательной определенности в их расположении, хотя каждое конечное количество можно строить вполне определенно, задавая, таким образом, некий итерационный процесс. Нельзя считать, что все рациональные числа уже построены.

А как же тогда располагаются на прямой иррациональные числа? Если считать, что все рациональные числа у нас есть, то остальные числа между ними иррациональны (рассуждения как на рис.1). Но рассуждения как на рис.2 показывают, что процесс уплотнения в два раза означает, что рациональные числа опять появляются между, как мы предположили, **всеми** рациональными числами, где по идее их не должно уже быть. Наше предположение было основано на том, что каждый отрезок или интервал имеет либо рациональную, либо иррациональную длину. Но давайте рассмотрим, например, десятичную запись, в которой рациональные числа представляются периодическими числами (с предпериодом или без), а иррациональные представлены непериодическими числами. Предположим, что мы имеем некоторую десятичную запись какого-то числа, с неограниченным количеством знаков (цифр) после запятой. Как определить, – это число периодическое или нет? При любом количестве просмотренных знаков после запятой периодичность может нарушиться, если она до этого была, или появиться. Например, два рациональных числа, у которых периоды равны соответственно сто и двести миллиардов знаков, совпадающих с первыми сто и двести миллиардов знаками числа «пи». А таких чисел с разными периодами неограниченно много. В этом проявляется неопределенность, которая «перемешивает» рациональные и иррациональные числа так, что их нельзя различить, так как они практически сливаются в непрерывном потоке. Или ещё, например, $\{1\} \neq \frac{\{0,(9)8\}}{\{0,(9)\}} \in [1]$. Кольцо P_J, *не разбитое на классы смежности* по идеалу I_J, точнее соответствует вещественной прямой, её сути непрерывности.

§ 6.2 Классификация и арифметика неограниченностей

6.2.1 Классификация неограниченностей. Определим натуральную степень-последовательность идеала I следующим образом: $I^{\{n\}} = \left\{\{a_n\}^{\{n\}} = \{a_n^n\} \middle|\ \text{где } \{a_n\} \in I\right\}, n = 1,2,3, \dots$. Идеал $I^{\{n\}}$ строго содержится в идеале I, то есть $I^{\{n\}} \subset I$, так как, например, последовательность $\left\{\frac{1}{2}\right\}^{\{n\}} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\} \notin I^{\{n\}}$ из-за того, что $\left\{\frac{1}{2}\right\} \notin I$, но $\left\{\frac{1}{2^n}\right\} \in I$. Аналогично, идеал $\left(I^{\{n\}}\right)^{\{n\}} = I^{\{n^2\}}$ строго содержится в идеале $I^{\{n\}}$, то есть $\left(I^{\{n\}}\right)^{\{n\}} \subset I^{\{n\}}$, так как последовательность $\left\{\frac{1}{2^n}\right\} \notin I^{\{n\}}$ из чего следует, что $\left\{\frac{1}{2^{n^2}}\right\} \notin \left(I^{\{n\}}\right)^{\{n\}}$, но $\left\{\frac{1}{2^{n^2}}\right\} \in I^{\{n\}}$, так как $\left\{\frac{1}{2^n}\right\} \in I$. Рассматривая далее, получаем цепочку строго вложенных идеалов:

$$I \supset I^{\{n\}} \supset I^{\{n^2\}} \supset I^{\{n^3\}} \supset \cdots \supset I^{\{n^k\}} \dots \qquad (1)$$

мы видим, что при любом фиксированном натуральном k, все идеалы цепочки содержат, к примеру, идеал $I^{\{n^k\}} \supset I^{\{n^n\}} = I^{\{n\}^{\{n\}}}$. Отметим, что $\left(I^{\{n\}}\right)^{\{n\}} \neq I^{\{n\}^{\{n\}}}$. Откуда появляется следующая цепочка строго вложенных идеалов:

$$I \supset I^{\{n\}} \supset I^{\{n\}^{\{n\}}} \supset \cdots \supset I^{\{n\}^{\cdot^{\cdot^{\{n\}}}}} \supset \cdots \qquad (2)$$

Или более точно:

$$I \supset I^{\{n\}} \supset I^{\{n^2\}} \supset I^{\{n^3\}} \supset \cdots \supset I^{\{n^k\}} \dots \supset I^{\{n\}^{\{n\}}} \supset I^{\{n\}^{\{n+1\}}} \supset \cdots \supset I^{\{n\}^{\{2n\}}} \supset I^{\{n\}^{\{2n+1\}}} \supset \cdots \supset I^{\{n\}^{\{3n\}}} \supset \cdots \supset I^{\{n\}^{\{n^2\}}} \supset \cdots \supset I^{\{n\}^{\{n\}^{\{n\}}}} \supset \cdots \supset I^{\{n\}^{\cdot^{\cdot^{\{n\}}}}} \supset \cdots \qquad (3)$$

Уже цепочка (1) дает одну из возможностей классификации неограниченностей:

$$\{n\} \prec 2^{\{n\}} \prec 2^{\{n^2\}} \prec 2^{\{n^3\}} \prec \cdots \prec 2^{\{n^k\}} \prec \cdots \qquad (4)$$

где k – натуральные числа. (Здесь обратили последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, … и записали последовательность $\{2^n\} = 2^{\{n\}}$).

Легко показать, что $\left\{\frac{1}{n}\right\} \notin I^{\{n\}}$, и при любом конечном натуральном k: $\{n^k\} \prec 2^{\{n\}}$. Цепочка (2) дает нам усиленный вариант классификации:

$$\{n\} \prec 2^{\{n\}} \prec 2^{\{n\}^{\{n\}}} \prec \cdots \prec 2^{\{n\}^{\cdot^{\cdot^{\{n\}}}}} \prec \cdots \qquad (5)$$

Или, что тоже самое,

$$\{n\} \prec 2^{\{n\}} \prec 2^{\{n^n\}} \prec \cdots \prec 2^{\left\{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}\right\}} \prec \cdots \qquad (6)$$

Следуя идеям Кантора, можно рассмотреть средний вариант между (4) и (5)

$$\{n\} \prec 2^{\{n\}} \prec 2^{\{2^n\}} \prec \cdots \prec 2^{\left\{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}\right\}} \prec \cdots \qquad (7)$$

Однозначности в классификациях неограниченностей нет, так как цепочки строго вложенных идеалов, определяющих ту или иную возможность классификации, можно строить многими способами. Не уплотняемых цепочек нет, поэтому и нет аналога континуум-гипотезы (тем более, что нет актуализации бесконечности в этой классификации). Например, между $\{n\} \prec 2^{\{n\}}$ вставим $\left\{\frac{3}{2}\right\}^{\{n\}}$: $\{n\} \prec 1{,}5^{\{n\}} \prec 2^{\{n\}}$. Действительно, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ и $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n} = e$, но $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{1{,}5^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n\frac{1{,}5^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right)^{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = e^0 = 1$. Аналогично, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1{,}5^n}\right)^n = 1$

Когда мы рассматриваем «хвост» последовательности и говорим о непронумерованных членах этой последовательности, мы имеем в виду, что каждая последовательность, пронумерованная натуральными индексами $\{n\}$, содержит подпоследовательности, которые, если рассматривать как самостоятельные последовательности, относятся к более высокой ступени классификации, недосягаемые для последовательности $\{n\}$.

К ***бесконечности*** мы здесь относимся как к ***пределу всевозможных неограниченностей***, который недосягаем для неограниченностей, что позволяет избежать противоречия. В каком-то смысле бесконечность и есть непрерывность, которую мы изучали (в вузе) через поле вещественных чисел, но этого, как оказалось, недостаточно. Кольцо «хвостов» сходящихся последовательностей P_J более приближено к понятию непрерывности, но и сходящиеся последовательности, если не считать стабилизирующиеся – это всего лишь неограниченный набор «скачков» числовых значений. Здесь непрерывность в точке, определяемая последовательностями компенсируется тем, что точка определяется не одной последовательностью (как в поле вещественных чисел), а смежным классом эквивалентных (но не равных) последовательностей, точнее их «хвостами». Выбор одного представителя класса – это один из способов определения места (числа). **Только всевозможные последовательности одного смежного класса как-бы могут закрыть все «пробелы» скачков, обеспечивая, хоть каким-то образом, непрерывность в точке.** О точке (не о месте или ядре) мы можем говорить, лишь задав «радиус» точки, который существенно зависит от способа построения этой точки (сходящегося итерационного процесса). Кроме того, опять же повинуясь понятию непрерывности, мы приходим к понятию непронумерованного «хвоста», так как в непрерывном движении не может быть последовательных шагов перехода (скачков) от одного места (числа) к другому. То есть в непрерывном движении, так как не может быть скачков, **нет и какой-либо упорядоченности** (последовательных) переходов. Движение внутри точки находится за пределами любой последовательности, которой она определяется. Непрерывное движение как бы «смазывается», переставая иметь последовательные шаги, так как, в конце концов, нет следующей точки или места, так же как и предыдущей.

Читатель, не удивляйтесь тому, что я одну и ту же мысль о не пронумерованных членах последовательностей (хвостах), провожу *много раз, – этим как-бы составляю смежный класс эквивалентных, но разных способов рассуждений для обоснования одной идеи.*

«Карфаген должен быть разрушен»

(лат. *Carthago delenda est, Carthaginem delendam esse*) — латинское крылатое выражение, означающее настойчивый призыв к борьбе с врагом или препятствием. В более широком смысле — постоянное возвращение к одному и тому же вопросу, независимо от общей тематики обсуждения.

«Не люблю повторяться!» – повторяла Повторюха-муха

Продолжение следует … .

В том, что есть всегда непронумерованные члены последовательности, говорят нам различные способы приближения последовательностей, например, к числу π. Или, что идеалы I и $I^{\{n\}}$ согласно классификации строго содержатся один в другом $I^{\{n\}} \subset I$.

6.2.2 Арифметика неограниченностей (первая наивная попытка).

С годами наивность взрослеет

В своих статьях [1-3], я рассматривал некоторые конструкции, которые теперь кажутся несколько наивными. Следующая конструкция возникла гораздо раньше, но не публиковалась. Итак, рассматривая натуральные числа как множество, и, складывая его с самим собой, получаем следующее: на множестве всевозможных пар прямого произведения множества натуральных чисел $N \times N = \{(i,j), \text{где } i,j \in N\}$ зададим отображение $\varphi: N \times N \to N$ по правилу: каждой паре (i,j) поставим в соответствие сумму $i+j$. Это отображение не является инъективным, так как двум различным парам, например, $(1{,}4)$ и $(3{,}2)$ ставятся в соответствие их суммы, равные одному и тому же значению – пяти. Оно также и не сюръективно, так как у числа 1 из N нет прообраза, – минимальная сумма равняется двум. Фактически пары отображаются на множество натуральных чисел без единицы, которое мы обозначим через $N+N$. Заметим, что это отображение задает разбиение на множестве пар $N \times N$.

Можно было бы сразу определить $N+N=\{i+j, \text{где } i,j \in N\}$, но тогда возникают вопросы типа: сколько в этом множестве, например, пятерок?

Аналогично, рассматривается отображение $\varphi_1: N \times N \times N \to N$, где каждой тройке также ставится в соответствие сумма этой тройки, и т.д. Приняв аналогичные обозначения $N+N+N$ и далее $N+N+\cdots+N$ перейдем к рассмотрению счетно неограниченного ряда: N, $N+N$, $N+N+N, \dots$, $N+N+\cdots+N, \dots$. Заметим при этом, что первый член ряда – это множество натуральных чисел, второй – это множество натуральных чисел без единицы, третий – без единицы и двойки, и.т.д. Получается, что множество, к которому движется этот ряд, не содержит натуральных чисел. Если учитывать, что каждый следующий член ряда содержится в предыдущих, то можно считать, что множество, к которому движется этот ряд, совпадает с пересечением членов этого ряда. И каково же это пересечение? Если рассматривать его с точки зрения содержания натуральных чисел, то оно как-будто бы пусто. Но, если относительно пересечения конечного числа множеств, замкнутость множества членов этого ряда очевидна, то замкнутости относительно пересечения неограниченного «числа» множеств может не быть. Например, пусть какая-нибудь строго убывающая последовательность положительных рациональных чисел $\{a_n\}$ стремится к иррациональному числу b. Рассматривая каждое число a_n последовательности, как отрезок $[0; a_n]$ (отрезки с рациональным концом), получаем ряд вложенных отрезков с общим началом, который можно рассматривать как ряд множеств, каждый следующий член которого, содержится в предыдущих. Пересечение этих множеств будет стремиться к отрезку с иррациональным концом $[0; b]$, где b – иррациональное число, который отличен от членов рассматриваемого ряда. Это пересечение не будет ни отрезком с рациональным концом, ни отрезком с иррациональным концом. Только предел пересечения будет отрезком $[0; b]$. А если бы предела не существовало бы (не только в рассматриваемом множестве, но и в любом его расширении)?

А может пересечение не пусто, но другой природы, не натуральной? Или натуральной, но не просчитываемой?

Есть ли жизнь после … жизни?

Каждому члену $N+N+\cdots+N$ (n слагаемых) поставим в соответствие набор (кортеж) $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ с минимальной возможной суммой. Очевидно, это будет, единственный для каждого члена ряда, набор $(1, 1, \dots, 1)$ (n слагаемых), с суммой равной n. Множеству, к которому движется ряд, соответствует набор, состоящий из неограниченного количества единиц $(1, 1, \dots, 1, \dots)$.

Дополним натуральный ряд числом ноль и обозначим его через N_0. Повторим все вышеприведенные построения. Нас интересует ряд N_0, $N_0 + N_0$, … , $N_0 + N_0 + \cdots + N_0$, … . Каждый член ряда, согласно построению, совпадает с N_0 и, соответственно, набор с минимальной суммой, для каждого члена ряда, равной нулю, имеет вид $(0, 0, \dots, 0)$. Множеству, к которому движется этот ряд, соответствует набор, состоящий из неограниченного количества нулей $(0, 0, \dots, 0, \dots)$. Установим теперь взаимно-однозначное соответствие между множествами (которые естественным образом упорядочены) N_0 и N по правилу $i \to i + 1$

Каждому натуральному числу в члене $N_0 + N_0 + \cdots + N_0$ (n слагаемых) рассматриваемого ряда поставим в соответствие набор $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ с условиями: 1) $i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_n$, 2) среди всех наборов с условием 1) число i_1 является наименьшим. Например, число 25 в $N_0 + N_0 + N_0 + N_0 + N_0 + N_0 + N_0$ (семь слагаемых) будет записано как $(4,4,4,4,3,3,3)$. В таблице наглядно видно, что вначале заполняется единицами предыдущий ряд, прежде, чем начинает заполняться следующий.

1	1	1	1			
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
4	**4**	**4**	**4**	**3**	**3**	**3**

Эта попытка построения привела к нижеследующей конструкции.

6.2.3 Арифметика неограниченностей (дубль два). Рассмотрим следующую конструкцию. Натуральные числа разобьем по отношению сравнения по модулю 19. Натуральные числа, представляя как набор единиц, будем укладывать в ячейки, по 19 штук в каждом слое. Это один из способов рассадки кроликов по (девятнадцати) клеткам в принципе Дирихле, который используют, когда хотят получить «наихудший» вариант. Например, число 21 заполняет один полный слой и еще две единицы (слева направо) во втором слое, 21=19+2. Числа кратные 19-ти укладываются в несколько полных слоев. Последний столбец соответствует классу ноль.

…																			
3-й																			
2-й	1	1																	
1-й	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***	***18***	***0***

Сравнения можно рассматривать по любому модулю $m > 1$. Обобщим данную конструкцию, неограниченно увеличивая значение m. Если считать, что ячеек не 19, а не ограниченно ни каким натуральным числом, то все натуральные числа в этой конструкции окажутся в первом слое. То же число 21 будет состоять из двадцати одной единицы, идущей подряд в первом слое, начиная с первой ячейки, остальные нули. Теперь перейдем к следующему построению.

Дополним натуральный ряд числом ноль и обозначим его через N_0. Рассмотрим счетно неограниченные кортежи $(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)$, где $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n \geq \cdots$, $i_k \in \{0,1\}, k = 1,2,3,\dots$ и сумма $i_1 + i_2 + \dots + i_n + \cdots$ является конечной. То есть все кортежи состоят: либо из одних нулей, либо содержат начальный отрезок, состоящий из конечного числа единиц, а остальные последующие числа – нули. Установим взаимно-однозначное отображение между N_0 и множеством этих кортежей: каждому картежу $(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)$ поставим в соответствие сумму $i_1 + i_2 + \dots + i_n + \cdots$, которая по построению является конечной. Числу ноль соответствует кортеж, состоящий только из нулей, обозначенный через $\overline{0}$, и так далее.

$$0 \leftrightarrow (0,0,\dots,0,\dots) = \overline{0}$$

$$1 \leftrightarrow (1,0,\dots,0,\dots) = \bar{1}$$

$$2 \leftrightarrow (1,1,0,\dots,0,\dots) = \bar{2}$$

....

$$n \leftrightarrow (\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots,0,\dots) = \bar{n}$$

....

Теперь рассмотрим взаимно-однозначное соответствие между множествами (которые естественным образом упорядочены) N_0 и N по правилу $i \to i+1$, которое индуцирует следующее взаимно-однозначное соответствие, так как $0 \leftrightarrow 0+1$, а $1 \leftrightarrow 1+1$

$$(0,0,\dots,0,\dots) \leftrightarrow (0+1,0+1,\dots,0+1,\dots)$$

$$(1,0,\dots,0,\dots) \leftrightarrow (1+1,0+1,\dots,0+1,\dots)$$

$$(1,1,0,\dots,0,\dots) \leftrightarrow (1+1,1+1,0+1,\dots,0+1,\dots)$$

....

$$(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots,0,\dots) \leftrightarrow \left(\underbrace{1+1,1+1,\dots,1+1}_{n},0+1,\dots,0+1,\dots\right)$$

....

Теперь поставив в соответствие последовательности $(0+1,0+1,\dots,0+1,\dots) = (1,1,\dots,1,\dots)$ символ $\bar{N}$, получаем последовательность $\bar{N}$, $\bar{N}+\bar{1}$, $\bar{N}+\bar{2}$, … , $\bar{N}+\bar{n}$, … , членам которой соответствуют последовательности $(1,1,\dots,1,\dots)$, $(2,1,\dots,1,\dots)$, $(2,2,\dots,1,\dots)$, … , $(\underbrace{2,2,\dots,2}_{n},1,\dots,1,\dots)$, … . Далее, устанавливая взаимно-однозначное соответствие между N_0 и подмножеством натурального ряда N по правилу $i \to i+2$, которое, аналогично предыдущему, индуцирует следующее взаимно-однозначное соответствие, так как $0 \leftrightarrow 0+2$, а $1 \leftrightarrow 1+2$

$$(0,0,\dots,0,\dots) \leftrightarrow (0+2,0+2,\dots,0+2,\dots)$$

$$(1,0,\dots,0,\dots) \leftrightarrow (1+2,0+2,\dots,0+2,\dots)$$

$$(1,1,0,\dots,0,\dots) \leftrightarrow (1+2,1+2,0+2,\dots,0+2,\dots)$$

………

$$(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots,0,\dots) \leftrightarrow \left(\underbrace{1+2,1+2,\dots,1+2}_{n},0+2,\dots,0+2,\dots\right)$$

………

Теперь поставив в соответствие последовательности $(0+2,0+2,\dots,0+2,\dots) = (2,2,\dots,2,\dots)$ символ $\overline{2N}$, получаем последовательность $\overline{2N}$, $\overline{2N}+\bar{1}$, $\overline{2N}+\bar{2}$, … , $\overline{2N}+\bar{n}$, … , членам которой соответствуют последовательности $(2,2,\dots,2,\dots)$, $(3,2,\dots,2,\dots)$, $(3,3,\dots,2,\dots)$, … , $(\underbrace{3,3,\dots,3}_{n},2,\dots,2,\dots)$, … . Продолжая процесс, получаем, используя соответствие, построенное по правилу $i \to i+k$, последовательность $(k,k,\dots,k,\dots)$, $(k+1,k,\dots,k,\dots)$, $(k+1,k+1,\dots,k,\dots)$, … , $(\underbrace{k+1,k+1,\dots,k+1}_{n},k,\dots,k,\dots)$, … , которая обозначена соответственно $\overline{kN}$, $\overline{kN}+\bar{1}$, $\overline{kN}+\bar{2}$, … , $\overline{kN}+\bar{n}$, … (здесь k − произвольное натуральное число). Далее, ставя в соответствие числу $0 \to 0+\overline{N} = \overline{N}$, исходя из правила $i \to i+\overline{N}$, получаем последовательность $(\overline{N},\overline{N},\dots,\overline{N},\dots)$, которую обозначим как $\overline{N^2}$. Аналогично, строим $\overline{N^3}$, и так далее $\overline{N^k}$, где $k = 1,2,3,\dots$. Построенная арифметика неограниченностей, линейно упорядочена, благодаря лексикографическому сравнению. Операции сложения и умножения во множестве N естественным образом индуцируются на новую арифметику. Умножение такое же, как и умножение многочленов:

$$(a_kN^k + a_{k-1}N^{k-1} + \dots + a_1N + a_0)(b_mN^m + b_{m-1}N^{m-1} + \dots + b_1N + b_0) = a_kb_mN^{k+m} + \dots + a_0b_0.$$

Сложение также аналогично сложению многочленов.

Глава 7

Некоторые следствия и парадоксы

§ 7.1 Конструкции построения вещественных чисел и факторкольцо P_J/I_J

7.1.1 О теории бесконечных десятичных дробей. Конструкция построения вещественных чисел Вейерштрасса. Здесь рассмотрим случай бесконечных десятичных дробей, который следует из более общего построения Вейерштрасса, использовавшего формальные ряды.

Определение. *Вещественное число есть бесконечная десятичная дробь, то есть выражение вида*

$$\pm a_0, a_1 \dots\ a_n\ \dots,$$

где $\pm$ есть один из символов $+$ или $-$, называемый знаком числа, a_0 – целое неотрицательное число, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – последовательность десятичных знаков (то есть элементов числового множества $\{0,1,\dots,9\}$).

При этом мы считаем *по определению*, что дроби $+0{,}00\dots$ и $-0{,}00\dots$ представляют одно и то же число, а также одно и то же число представляют дроби вида $\pm a_0, a_1 \dots\ a_n 999\ \dots$ и $\pm a_0, a_1 \dots\ (a_n+1)000\ \dots, (a_n \neq 9)$. Смысл этого соглашения очевиден, поскольку рациональные числа, соответствующие этим дробям совпадают. (см. Википедия. Конструктивные способы определения вещественного числа,[15]).

Определение. *Последовательности десятичных дробей вида (a_0; a_0, a_1; $a_0, a_1 a_2$; $a_0, a_1 a_2 a_3$; …), где a_0 – целое число, а a_k, где $k = 1,2,3,\dots$, принимают цифровые значения из множества $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ назовем лексикографическими.*

Примеры:

1) $(1; 1{,}0; 1{,}00; \dots)$ – представляет конечную десятичную дробь, является лексикографической последовательностью;

2) $(0; 0{,}9; 0{,}99; \dots)$ – представляет периодическую десятичную дробь, является лексикографической последовательностью;

3) $(0; 0{,}8; 0{,}98; 0{,}998 \dots)$ – не является лексикографической последовательностью;

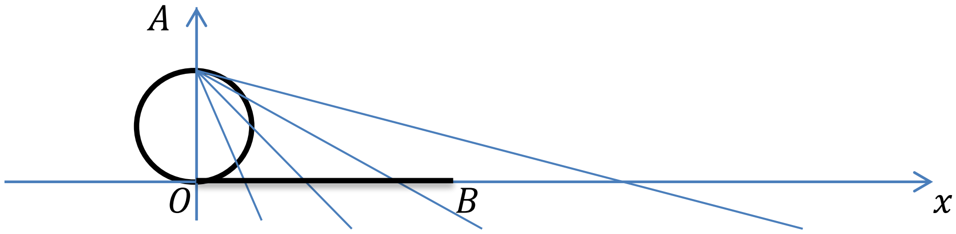
4) $(3; 3{,}1; 3{,}14; \dots) \in [\pi]$ – представляет непериодическую дробь, каждый $n -$ й член которой, совпадает с первыми n цифрами десятичной записи числа π, является лексикографической последовательностью.

Теорема 7.1.1. *В каждом смежном классе факторкольца P/I ровно одна лексикографическая последовательность десятичных дробей, с точностью до записи $a_0, a_1 a_2 \dots a_n(9) = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$, где a_0 – целое число, a_i – цифры, $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$, $a_n \neq 9$.*

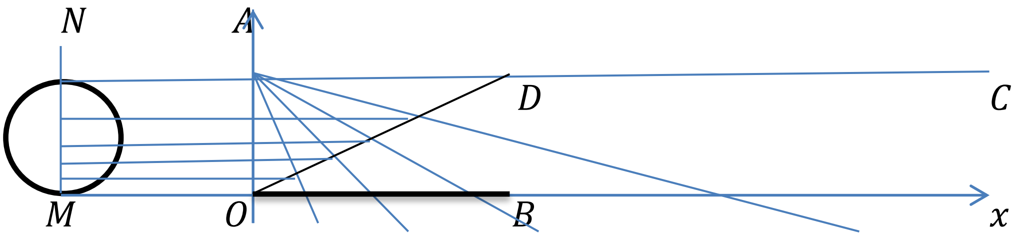
Доказательство. Достаточно рассмотреть разность двух лексикографических последовательностей.

Комментарий. Запись с периодом является очень удобной и несет в себе определенный смысл (периодические числа являются рациональными и наоборот), и после факторизации равенство $0,(9) = 1$ становится верным, так как эти числа представляются последовательностями из одного класса (примеры 1 и 2). Но на самом деле число 1 представляет собой обозначение общего члена стационарной последовательности, которая, в частности, хотя и формально, является лексикографической, аналогично, и $0,(9)$ представляет общий член последовательности из примера 2. И, если 1 является пределом последовательности из примеров 1 и 2, то $0,(9)$ таковой не является. Можно возразить, что $0,(9)$ не совпадает ни с одним из членов последовательности примера 2 и, более того, превосходит по значению любого из них. Но то же самое и для $\frac{1}{n}$, обозначающего общий член последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ - он не совпадает ни с одним из них, несмотря на запись (если совпадет, то уже будет частным, а не общим), и предел последовательности равен нулю. Более наглядно, рассмотрим разность последовательностей из примеров 1 и 2: $\{1\} - \{0,(9)\} = \{10^{-n}\}$ (здесь запись означает $\{0,(9)\} = (0{,}9; 0{,}99; \dots)$, то есть начинается с $0{,}9$, а не с нуля как в примере 2. Количество девяток после запятой в каждом члене совпадает с индексом, то есть $0,(9)$ рассматривается здесь как общий член этой последовательности). Эта разность является обратимой последовательностью в кольце частных $S^{-1}P$ (см.2.2.1), предел которой равен нулю. Такая коллизия обозначений привела к неоднозначности записи вещественных чисел. В примере 4, общий член последовательности не поддается более или менее удачной записи и, поэтому приходится число, к существованию которого пришли исходя из геометрических соображений, обозначить буквой π. Пример 3 показывает, что не так однозначно и не так просто устроена вещественная прямая и десятичная система счисления для нее в каком-то смысле «груба», хотя, чтобы определить сходящийся однозначно процесс к любому месту на прямой, достаточно и двоичной системы счисления, как некоторой кодировки с неограниченным числом знаков или членов последовательности, интерпретирующей данный процесс. Запись общего члена последовательности в примере 3, типа $0,(9)8$ в поле вещественных чисел не имеет смысла, так как восьмерку за неограниченным числом девяток, мы все равно не увидим, хотя последовательность в кольце P существует, и скрывала, как мы убедились, тайны от нас (см. главу 5). Замечу также, что общего члена последовательности, как такового, не существует, есть его обозначение (удобная запись), как некоторого безликого члена, с некоторыми общими для последовательности свойствами. В факторкольце P_J/I_J «хвосты» последовательностей как раз различают записи типа $0,(9)$ и $0,(9)8$, если их интерпретировать как $(0;\ 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ \dots)+J$ и $(0;\ 0{,}8;\ 0{,}98;\ 0{,}998;\ \dots)+J$. Здесь запись $0,(9)$ больше подходит как запись «хвоста», когда отрицаются все записи вида $0,\underbrace{9\dots9}_{n}$, где n – конечные фиксированные натуральные числа, однако и здесь не все так просто. Две последовательности $\left(0{,}9; 0{,}99; 0{,}999; \dots;\ 0,\underbrace{9\dots9}_{n}; \dots\right)$ (n –й член содержит n девяток после запятой) и $\left(0{,}99; 0{,}999; 0{,}9999; \dots;\ 0,\underbrace{9\dots9}_{n+1}; \dots\right)$ (n –й член содержит $n+1$ девяток после запятой) имеют разные «хвосты», хотя общие члены обеих последовательностей могут быть записаны как $0,(9)$. В принципе, общий член второй последовательности может быть записан как $0{,}9(9)$ или $0,(9)9$, если допускать записи подобного вида. Но они не будут иметь особого смысла в поле вещественных чисел. То же самое и для записей типа $0,(9)30051963\dots$, где за «кучей» девяток, «хвост» не будет «виден».

Теорема 7.1.1 показывает, что рассматриваемый в работе изоморфизм $P_J/I_J \cong {}^{P}/_{I} \cong R$, вполне согласуется с конструкцией бесконечных десятичных дробей, как представителей смежных классов, определяющих вещественные числа на прямой. Кроме того, каждый смежный класс в ${}^{P}/_{I}$, представляющий число имеет и другие представители, кроме лексикографических последовательностей, которые отличаются между собой на неограниченно малый «хвост». Это означает (опять же см. главу 6), что вещественная прямая не состоит из вещественных чисел. Числа представляют смежные классы последовательностей в $P/_I$ (P_J/I_J), которые определяют (неоднозначно) точки на прямой. Точки рассматриваются как отрезки неограниченно малой длины. *Неопределенность длины влечет неоднозначность представления точки на вещественной прямой вещественным числом.* Это показывает следующее взаимно-однозначное соответствие:



Вещественные числа на положительной полуоси O_x «упаковываются» взаимно однозначно на правой полуокружности OA. И, если полуокружность OA распрямить и расположить на полуоси O_x (OB), то говорить об однозначности «толщины» точек не приходится, все зависит от того, как задается итерационный процесс. Этот процесс нельзя считать завершенным, иначе, как было показано в главе 6, это приводит к противоречию. Процессы, устанавливающие взаимно-однозначное соответствие можно задавать неограниченным количеством способов. Например, можно задать и так, пропуская через OD :



Ясно, что эти соответствия различны.

Точка представляется **смежным классом** сходящихся последовательностей, а **число** только **одним произвольным представителем** смежного класса. Для числа нельзя задать понятие «длины», как для точки, пусть она и носит неопределенный неограниченно малый характер. Если фактор-кольцо P_J не разбивать на смежные классы по идеалу I_J, то оно больше будет соответствовать переходам соответствующим движению. Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}+J$ и $\left\{\frac{2}{n}\right\}+J$ в P_J являются разными смежными классами по идеалу J, а $\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}+J\right)+I_J$ и $\left(\left\{\frac{2}{n}\right\}+J\right)+I_J$ представляют один и тот же смежный класс I_J в фактор кольце P_J/I_J. Поэтому и было введено понятие «выделенный представитель» в фактор кольце P_J/I_J.

7.1.2 Абсолютный нуль Эйлера. *В своем сочинении «Основы дифференциального исчисления» (Institutiones calculi differentialis, 1755), классическом курсе математического анализа XVIII в., Эйлер привел следующее рассуждение:*

> *Каждая величина, несомненно, может уменьшиться настолько, что исчезнет полностью и растает. Но бесконечно малая величина есть не что иное, как исчезающая величина, и поэтому сама равна нулю. Это полностью согласуется также с определением бесконечно малых величин, по которому эти величины должны быть меньше любого заданного числа. Ясно, что такая величина не может не быть нулем, ибо если бы она была отлична от нуля, то вопреки предположению не могла бы быть* ***меньше самой себя****.*

Такие бесконечно малые, как dx (обозначение Лейбница), равны нулю, следовательно, равны нулю $(dx)^2$, $(dx)^3$ и т.д., утверждал Эйлер, потому, что последние принято считать бесконечно малыми более высокого порядка, чем dx.

И, далее

Эйлер подчеркивал, что эти дифференциалы (предельные значения) – абсолютные нули и из них нельзя извлечь ничего, кроме их отношения, которое и было вычислено в заключение и оказалось конечной величиной (см. [8], с.172).

В принципе, Эйлер был недалек от истины (насчет, меньше самой себя), только нужно было рассматривать не сами числа, а их интерпретации или представления с помощью последовательностей, точнее «хвостов» соответствующих смежных классов по идеалу J в кольце сходящихся последовательностей P. А что касается поля вещественных чисел, то рассуждения Эйлера абсолютно верны.

В свое время Галилей, установив взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и четными натуральными числами, считал, что получил противоречие. Кантор же это соответствие взял за определение множеств, которые не являются конечными. Нечто подобное у Эйлера, возможно, позволило бы определить понятие бесконечно малой: величина называется бесконечно малой, если она меньше самой себя. Смотрите, например, 6.1.3 о распределении рациональных чисел на отрезке BD, расположенных как бы плотнее, чем рациональные числа на BC. Расстояние между рациональными числами как бы меньше своего же исходного расположения. А также 5.1.3 когда общий член последовательности $\{n\}$ должен «догнать» общий член своей подпоследовательности $\{2^n\}$, откуда $\left\{\frac{1}{n}\right\} \succ \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. Кроме того, так как $I = k \cdot I$, где k может принимать любые, отличные от нуля, вещественные значения, получается, что идеал I как бы меньше самого себя, если k отличен от единицы.

7.1.3 Канторовское построение вещественной прямой.

Построение теории вещественных чисел по Кантору.

Две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ могут определять одно и то же вещественное число. Это имеет место при условии

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\ \forall\, n > N(\varepsilon)\ |a_n - b_n| < \varepsilon$$

Таким образом, на множестве всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел устанавливается отношение эквивалентности, и в соответствии с общим принципом все фундаментальные последовательности разбиваются на классы эквивалентности. Смысл этого разбиения таков, что последовательности из одного класса определяют одно и то же вещественное число, а последовательности из разных — разные. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между вещественными числами, и классами фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Теперь мы можем сформулировать основное определение теории вещественных чисел Кантора.

Определение. *Вещественное число есть класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел.*

Вещественное число (класс эквивалентности), определяемое фундаментальной последовательностью рациональных чисел $\{a_n\}$ обозначим $[a_n]$.

Арифметические действия с вещественными числами вводятся следующим образом. Если даны два вещественных α и β, определённые фундаментальными последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, так что

$$\alpha = [a_n] \text{ и } \beta = [b_n],$$

то суммой α и β называется вещественное число, определяемое стью $\{a_n + b_n\}$, то есть класс эквивалентности, содержащий эту последовательность:

$$\alpha + \beta \stackrel{\text{def}}{=} [a_n + b_n]$$

Нетрудно проверить, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора конкретных последовательностей $\{a_n\}$ из класса α и $\{b_n\}$ из класса β.

Аналогично определяются разность, произведение и частное вещественных чисел.

Вещественное число $\alpha = [a_n]$ *по определению* больше числа $\beta = [b_n]$, то есть $\alpha > \beta$, если

$$\exists\ \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ a_n \geq b_n + \varepsilon$$

Это определение не зависит от выбора последовательностей $\{a_n\}$ из класса α и $\{b_n\}$ из класса β. Система рациональных чисел включается в систему вещественных чисел посредством дополнительного соглашения, согласно которому последовательность

$$a, a, \dots, a, \dots$$

все члены которой равны одному и тому же рациональному числу α определяет это само число, так что $[a] \stackrel{\text{def}}{=} a$. Иначе говоря, всякий класс $[a]$, содержащий стационарную последовательность $a, a, \dots, a, \dots$ отождествляется с числом a. Таким образом, сконструированное множество вещественных чисел является расширением множества рациональных.

На этом построение множества вещественных чисел завершено. Далее, на основе введенных определений можно доказать известные свойства вещественных чисел.

(см. Википедия. Конструктивные способы определения вещественного числа, [15]) (см.также [16] и[17])

Фактически Кантор построил кольцо K фундаментальных последовательностей с рациональными числами, определяя вещественные числа как классы эквивалентности этих последовательностей. В конце концов, каждый класс эквивалентных фундаментальных последовательностей имеют один и тот же свой предел (см. [17]). Множество вещественных чисел он рассмотрел как пополнение множества рациональных чисел иррациональными числами, которые определяются произвольными представителями из соответствующих классов. Но если фундаментальная последовательность с рациональными коэффициентами не сходится к рациональному числу, а сходится к значению β, то ни один член не совпадает с β, хотя и однозначно определяет число β (место). Она с ним не совпадает, потому, что последовательность не может быть стабилизирующейся. В то же время число β (место) определяет все последовательности (например, с рациональными коэффициентами), сходящиеся к этому месту. Это как всякий человек (до появления возможностей клонирования, суррогатного материнства, появления из пробирок и прочее) однозначно определяет биологическую маму (папу тоже, но может потребоваться генетическая экспертиза), но не совпадает со своей мамой. Многодетная мама может однозначно определяться любым своим ребенком (независимо от одного или от разных мужей), но мама не может определять конкретного ребенка – она определяет всех своих детей. И эти дети различны (даже близнецы). Это опять же говорит о том, что иррациональные числа определены с помощью фундаментальных последовательностей с рациональными членами, с точностью до «бесконечно малых величин» (неограниченно малых последовательностей в K_J), которые задают различные способы приближения к данному месту (числу). Следует отметить, что построение Г.Кантора более чувствительно тонко и более **алгебраично**, чем у Дедекинда и Вейерштрасса, несмотря на их эквивалентность. Удивительно при этом, что такие важные понятия современной алгебры, как **кольцо, идеал и модули ввел Дедекинд**, чья конструкция была более геометричной, а потому самой наглядной и доступной для восприятия. Читая его «Непрерывность и иррациональность», мне явственно виделось, что понятие поля вполне могло зародиться в этом исследовании. Но когда я узнал из пятитомника математической энциклопедии (см.[18] т.2, с. 485), что именно Р.Дедекинд ввел понятие идеала, то был крайне удивлен (см. также [19]). Я был уверен, что он не знал этого определения и, поэтому вынужден был непрерывность вводить аксиоматически.

Изоморфизмы

$$K/I \cong {(K/J)}\Big/{(I/J)} = K_J/I_J \cong R \quad \text{и} \quad P/I \cong {(P/J)}\Big/{(I/J)} = P_J/I_J \cong R$$

влекут по транзитивности изоморфизм $K_J/I_J \cong P_J/I_J$ (идеалы I_J – аддитивные абелевы группы последовательностей сходящихся к нулю, каждый в своем кольце, несмотря на одинаковое обозначение). Что означают эти изоморфизмы? Они означают, что и рациональные, и ***вещественные числа*** всего лишь ***всюду плотны на вещественной прямой,*** и больше ничего. Кантор, как и Вейерштрасс, определяя вещественные числа, как классы эквивалентности сходящихся последовательностей рациональных чисел (суммы сходящихся рядов у Вейерштрасса) довольствовались **представителями** этих классов, а **не самими классами**. Например, Кантор, доказывая равномощность точек квадрата и его стороны, рассматривал точку, определенную десятичной записью координат. На самом деле, Кантор доказал, что можно задать процесс установления взаимно однозначного соответствия между местами в квадрате, определенными парами вещественных чисел и местами на стороне квадрата, определенными вещественными числами. Процесс неограниченный, но каждый раз конечный, и поэтому не завершаемый.

Кантор не рассматривал природу непрерывности, для него достаточно было определить вещественные числа и показать полноту фундаментальных последовательностей с рациональными коэффициентами, что и считалось им эквивалентом непрерывности. Сечение Дедекинда основано на аксиоме непрерывности. В 3.2.1 на основании изоморфизма $K/I \cong {(K/J)}\Big/_{(I/J)} = K_J/I_J \cong R$ показано, что смежные классы сходящихся последовательностей с рациональными коэффициентами определяют место, а место определяет точку на вещественной прямой. Таким образом, исходя из построенного фактор-кольца K/I, была доказана «аксиома непрерывности». Обратное очевидно.

Для доказательства непрерывности исходят, прежде всего, из того, что вещественная прямая состоит из вещественных чисел. Но на самом деле в фактор-кольце P_J (или P_J/I_J) стабилизирующиеся последовательности, представляющие ядра точек (места) или просто вещественные числа (опять же) лишь всюду плотны на вещественной прямой. В фактор-кольце K_J/I_J есть безъядерные смежные классы, хотя сами рациональные числа также всюду плотны на вещественной прямой. Последовательности с вещественными членами замкнуты относительно взятия предела (полнота). Возвращаясь к рассуждениям предыдущей и настоящей главы, повторимся еще раз, что вещественная прямая не состоит из вещественных чисел. Она состоит из «хвостов» последовательностей по идеалу J факторкольца P_J (может быть разбитое на смежные классы по идеалу I_J). Это, как уже отмечалось в 6.1.2, ближе к понятию непрерывности, но даже и оно имеет скачкообразный (дискретный, последовательный, так как описывается последовательностями) подход, и не дает возможности в полной мере описать ту же непрерывность движения, – непрерывный переход от одного места до другого, в силу того, что нет непосредственного предыдущего и последующего. Непрерывность, связывая предыдущее и последующее, должна нести в себе обе эти ипостаси, «размазывая» некую упорядоченность предыдущего, непосредственного и последующего. Как настоящее связывает прошлое и будущее: идя в будущее, превращается в прошлое. Настоящее – это прошлое будущего. Настоящее – это переходное состояние между неопределенным (вероятностным) будущим и уже состоявшимся определенным прошлым. Ничего, вроде, кроме настоящего нет, – прошлого уже нет (уже прошло), будущего еще нет (еще не наступило) – иначе они так не будут называться.

Есть только миг между прошлым и будущим …

Л.Дербенев

7.1.4 Нестандартный анализ и «недокольцо» B_J**.** М. Клайн справедливо отмечает (см. [8] с.319), что в нестандартном анализе бесконечно малые величины являются постоянными **фиксированными числами**, а не переменными в смысле Лейбница и не переменными величинами, стремящимися к нулю, как понимал иногда бесконечно малые величины Коши и как понимают их сегодня в стандартных учебниках «высшей математики». Кроме того, нестандартный анализ вводит **новые бесконечные элементы**, обратные бесконечно малым, но не являющиеся трансфинитными числами Кантора. О том же пишет В.А. Успенский в [20] на странице 9.

Вышеприведенная нами интерпретация именно такая, как как она понимается в стандартных учебниках «высшей математики». Однако, мы приведем здесь следующую алгебраическую конструкцию – множество с частичными операциями сложения и умножения, расширяющее основное множество кольца P, которая близка нестандартному анализу тем, что она будет содержать неограниченно большие последовательности и, так же, как и в нестандартном анализе не является полем и даже кольцом.

Кольцо частных $S_J^{-1}P_J$ нам не подходит, так как в нем помимо неограниченно больших последовательностей, появляются дроби, по сути, представляющие последовательности, не имеющие предела.

Рассмотрим кольцо $\bar{P}$ как расширение кольца P. Идеал I кольца P уже не будет идеалом кольца $\bar{P}$.

Определение 1. Последовательность из $\bar{P}$ называется квазиобратимой, если найдется такая последовательность из $\bar{P}$, умножение на которую есть последовательность, сходящаяся к единице.

Однозначности в такой квазиобратимости нет. Ясно, что последовательности, квазиобратимые в $\bar{P}$, будут квазиобратимыми и в $\overline{P_J}$ и, наоборот.

Очевидной представляется следующая

Лемма. *Все последовательности из смежных классов в U_J квазиобратимы. Их квазиобратными являются неограниченно большие положительные последовательности. И всякая неограниченно большая положительная последовательность квазиобратима. Их квазиобратными являются последовательности из смежных классов в U_J.*

Таким образом, множество всех неограниченно больших положительных последовательностей из $\bar{P}$ можно обозначить через U_+^{-1}, аналогично, U_-^{-1} обозначает множество всех неограниченно больших отрицательных последовательностей. Неограниченно большие последовательности, не являющиеся неограниченно большими последовательностями одного знака (то есть, начиная с некоторого конечного индекса, все члены имеют один и тот же знак), в этой конструкции не представляют интереса, так как они являются расходящимися, – они содержат как неограниченно большие положительные, так и неограниченно большие отрицательные подпоследовательности. Кроме того, квазиобратные к ним будут последовательности с неограниченным числом как положительных, так и отрицательных членов, которые хоть и сходятся к нулю, но не замкнуты относительно сложения – в сумме могут появиться последовательности с неограниченным числом нулевых членов. Для каждого из U_+^{-1} и U_-^{-1} по отдельности это не так.

Основное множество кольца P расширим множествами U_+^{-1} и U_-^{-1}:

$$B = P \cup U_+^{-1} \cup U_-^{-1}$$

Множество B не замкнуто относительно сложения и умножения последовательностей. Эти операции на множестве B являются частичными. Произведение последовательностей из P и последовательностей из $U_+^{-1} \cup U_-^{-1}$ определено лишь в случае, когда в результате такого произведения получается либо сходящаяся последовательность, либо одна из неограниченно больших последовательностей из $U_+^{-1} \cup U_-^{-1}$. Само объединение $U_+^{-1} \cup U_-^{-1}$ замкнуто относительно умножения, но не замкнуто относительно сложения. Действительно, произведение неограниченно больших последовательностей одного знака (начиная с некоторого индекса), будет неограниченно большой последовательностью одного знака. И, если $\{a_n\} \in U_+^{-1}$, то $\{-a_n\} \in U_-^{-1}$, $\{a_n + (-1)^n\} \in U_+^{-1}$, то сумма $\{a_n + (-1)^n\} + \{-a_n\} = \{(-1)^n\}$ является последовательностью, не имеющей предела.

Таким образом, множество B не является кольцом относительно этих операций, но содержит кольцо P, мультипликативную полугруппу $U_+^{-1} \cup U_-^{-1}$, кроме того, определена частичная операция умножения между элементами кольца P и мультипликативной полугруппы $U_+^{-1} \cup U_-^{-1}$. Особенно интересуют случаи, когда в результате этих произведений получаются сходящиеся к конечным значениям последовательности, так как это связано с построением определенных интегралов, как площадей криволинейных трапеций. Например, в простейшем случае, рассмотрим единичный квадрат, его площадь будем представлять как сумму произведений длин разбиения единичного отрезка (основание) на ширину (высота). Основание квадрата (то есть единичный отрезок) представляем суммами $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \cdots = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n} = \cdots$. Высота квадрата всегда равна единице, поэтому площадь можно представить в виде

$$S = 1 \cdot 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot 1 = \cdots = \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{n} \cdot 1 = \cdots$$ или

$$S = 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \cdots = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 1 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot 1}_{n}$$ или

$S = 1 \cdot 1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) \cdot 2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) \cdot 3 = \cdots = \left(\frac{1}{n} \cdot 1\right) \cdot n = \cdots$ или $S = \left\{\left(\frac{1}{n} \cdot 1\right) \cdot n\right\} = \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \cdot \{1\}\right) \cdot \{n\}$

Произведение в скобках $\left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \cdot \{1\}\right)$ означает площадь прямоугольника с основанием равным $\frac{1}{n}$ (при каждом фиксированном n) и высотой равной 1. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\} \cdot \{1\} = \left\{\frac{1}{n} \cdot 1\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \in U$, а последовательность $\{n\} \in U_+^{-1}$. То есть площадь здесь представляется инвариантным произведением (стационарной последовательностью) взаимно обратных последовательностей, одна из которых неограниченно устремлена к нулю, другая неограниченно увеличивается, стремясь к бесконечности.

Перейдем теперь к рассмотрению классов смежности кольца $\bar{P}$ по идеалу

$$J = \{\{c_n\} | \text{существует } k, \text{такое, что } c_m = 0, \text{при } m > k, c_n \in R, k, m \in N\},$$

который, в отличие от идеала I, действительно является идеалом в этом кольце. В кольце $\bar{P}_J = \bar{P}/J$ выделим, аналогично рассмотренному, множество

$$B_J = P_J \cup U_{J^+}^{-1} \cup U_{J^-}^{-1}, \text{ где } U_{J^+}^{-1} = U_+^{-1}/J, U_{J^-}^{-1} = U_-^{-1}/J.$$

Определение квазиобратимости последовательностей сузим до определения обратимости последовательностей.

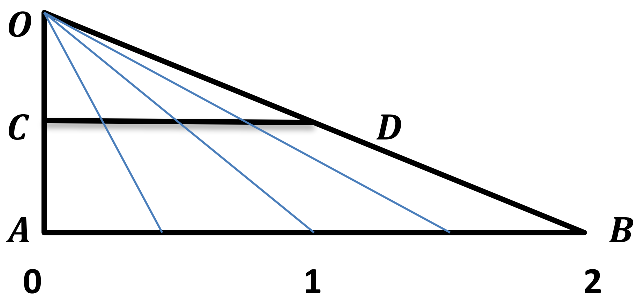
Определение 2. Последовательность из $\bar{P}$ называется обратимой, если для нее найдется последовательность из $\bar{P}$ такая, что их произведение является последовательностью, которая, начиная с некоторого конечного индекса, состоит только из единиц.

Теперь понятно, что для всякого элемента из $U_J \subset P_J \subset B_J$ (смежного класса последовательностей с одинаковыми «хвостами») обратный элемент из $U_{J^+}^{-1} \subset B_J$ будет единственным. «Недокольцо» B_J, хотя и существенно отличается от нестандартного анализа, но имеет общий подход, связанный с расширением основного множества элементами, не носящими конечный характер.

§ 7.2 Парадоксы

7.2.1 Радиус смежного класса данного сходящегося итерационного процесса. Возвращаясь к пункту 3.1.4, сходящиеся последовательности представляются сходящимися итерационными процессами, которые отличаются скоростями сходимости.

Рассмотрим частный случай, когда единичный отрезок пошагово делится на n равных частей, при неограниченном увеличении n. Для каждого вещественного числа $a, (0 \le a \le 1)$ этот итерационный процесс деления свяжем с элементом $\left(\left\{a + \frac{1}{n}\right\} + J\right) + I_J$, где $\left\{a + \frac{1}{n}\right\} + J$ – выделенный элемент («хвост») факторкольца P_J/I_J, представляющий вещественное число a. Никакое другое вещественное число (другой смежный класс) не находится в «радиусе» $\left\{\frac{1}{n}\right\} + J$ от значения a при данном итерационном процессе. «Радиус» может задаваться любым представителем из U_J, поэтому не имеет определенного «значения» – разные «радиусы» можно отличать лишь отношением. Отношение может быть последовательностью, сходящейся к ненулевому конечному числу или быть неограниченно малой или неограниченно большой или не иметь предела. Часто «радиус» задается смыслом задачи, в виде итерационного процесса. Поясним на примере.



В треугольнике AOB, CD – средняя линия. Разбивая отрезок AB длины 2, на n равных частей при неограниченном возрастании n, получаем, что расстояния между местами деления изменяется по формуле $\left\{\frac{2}{n}\right\}$, заданным итерационным процессом деления. При неограниченном возрастании n, соответствующем последовательности $\left\{\frac{2}{n}\right\}$, в «радиусе» $\left\{\frac{2}{n}\right\} + J$ не будет ни одного места, соответствующего вещественному числу. В силу взаимно-однозначного соответствия заданного лучами, исходящими из вершины O, отрезок CD синхронно разбивается также как и отрезок AB с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Соответственно «радиус» на отрезке CD с центрами в местах деления равен $\left\{\frac{1}{n}\right\} + J$.

Заметим, что радиус итерационного процесса не является фиксированной величиной, он имеет **лишь относительную сущность** при возможности сравнивать его с другими радиусами других итерационных процессов. Все это глубоко связано с понятием времени, точнее с одновременностью, с такими понятиями, как быстрый сходящийся процесс, скорость сходимости. Сравнивая процессы, связанные с движением относительно шагов n, исподволь принимаем, что каждый раз сравнивая члены последовательностей данных итерационных процессов с одинаковыми индексами, проходит одинаковое количество времени: для каждого n, значения a_n и b_n последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ принимаются одновременно.

Можно делить и на n^2 одинаковых частей. Соответственно $\left\{\frac{2}{n^2}\right\}+J$ и $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}+J$ будут «радиусами» отрезков AB и CD при данном взаимно-однозначном соответствии мест. Можно отрезок AB делить, например, на $2n$ одинаковых частей, а отрезок CD на n одинаковых частей. Тогда «радиусы» у них будут одинаковы, но не будет взаимно-однозначного соответствия мест. Можно отрезок AB делить, например, на m одинаковых частей, а отрезок CD на k одинаковых частей, причем m и k неограниченно возрастая, никак не зависят друг от друга (или зависимость не может быть установлена). Но тогда никакой связи этих процессов делений не будет (или не может быть установлена).

Вывод: места определяются неоднозначно и существенно зависят от заданного соответствия. Как это может быть? Будем рассуждать как в главе 6. Допустим, что все места (числа) на отрезке AB $([0;2])$, пробиты лучами. Тогда им соответствуют вещественные числа (места) на отрезке CD одинаковые по мощности, но в два раза более плотно расположенные. Причем отрезок $[0;1]$ на отрезке AB и отрезок такой же длины CD при данном соответствии, которое определено данным итерационным процессом деления, не взаимно однозначны (см. рис). Хотя как бы все вещественные числа обоих отрезков пробиты лучами. На отрезке AB они пробиваются в **2 раза медленнее**. «Радиусы» определяются заданными итерационными процессами (последовательностями, выделенными элементами).

Математики иногда придают изоморфизмам и взаимно-однозначным соответствиям излишнее значение и свойства, которые им не присущи, но присущи в случаях конечных множеств.

Вообще, все это связано с обратимостью этих элементов в некотором расширении фактор-кольца P_J/I_J неограниченно большими последовательностями, например, из $U_{J^+}^{-1}$. Так в этом случае для $\left\{\frac{1}{n}\right\}+J$ обратной последовательностью будет $\{n\}+J$, а для $\left\{\frac{2}{n}\right\}+J$ – соответственно $\{2n\}+J$. Это наводит на аналогии: мощности множеств N

натуральных чисел и Z целых чисел счетно неограниченны и между ними можно установить как взаимно-однозначное соответствие, так и можно одно множество вложить в другое, и наоборот. Но сами множества все-таки разные, – множество N натуральных чисел является подмножеством Z целых чисел, а множество Z не является подмножеством N.

Теперь, немного повторяясь, можно перейти к рассмотрению парадокса Кавальери.

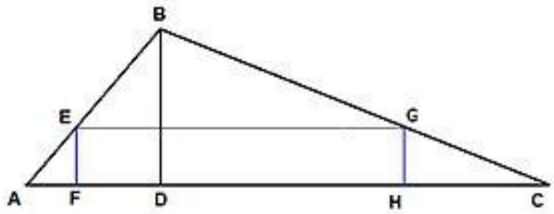
7.2.2 Принцип и парадокс Кавальери. Здесь мы рассмотрим парадокс Кавальери.

В современном виде **принцип Кавальери** выглядит следующим образом:

- Для плоскости: *Площади двух фигур с равными по длине хордами всех их общих секущих, параллельных прямой, по одну сторону от которой они лежат, равны.*
- Для пространства: *Объёмы двух тел над плоскостью, с равными по площади сечениями всех общих секущих их плоскостей, параллельных данной плоскости, равны.*

Принцип Кавальери используется до сих пор, например в теореме Тонелли — Фубини в обобщённом виде, но обычно те же следствия получают непосредственно интегрированием.

Парадокс Кавальери



Математики сразу указали на возможность ошибочного применения принципа Кавальери; один из таких примеров привёл сам Кавальери в письме к Торричелли (см. рисунок). Треугольники ABD и BCD состоят из вертикальных неделимых, причём каждой неделимой левого треугольника (EF) можно взаимно-однозначно сопоставить неделимую той же длины (GH) правого треугольника. Отсюда, согласно принципу Кавальери, следует ошибочный вывод, что площади треугольников равны. Тем не менее ясного правила для избежания ошибок Кавальери не дал. (см. [21])

Объясним парадокс Кавальери, проводя сначала рассуждения в фактор-кольце P/I. Если установлено взаимно однозначное соответствие между вертикальными неделимыми, то установлено взаимно однозначное соответствие между основаниями (точками) на которые эти неделимые опираются. Пусть точка A будет совпадать с началом координат, ось направлена от начала в сторону точки C, точка D имеет координату 1, а точка C – координату 4 (см. рис). В нашей конструкции основаниями (точками) являются смежные классы $\{a_n\}+I$, где $\{a_n\}$ сходятся к вещественным числам a, принадлежащим отрезку $[0;4]$. Таким образом, для определенности, мы приняли, соответственно рисунку, что $DC = 3 \cdot AD$. Идеалу I соответствует точка с координатой, равной нулю. Что произойдет, если каждую последовательность класса I умножить на 3? Как множество $I = 3 \cdot I$, то есть множество не изменится, но все ненулевые члены последовательностей из I увеличатся в три раза. Рассматривая синхронное деление отрезков DC и AD на n одинаковых частей, учитывая, что длину отрезка AD для удобства, мы считаем равной единице и, соответственно длину отрезка DC равной трем, перейдем к последовательностям $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{3}{n}\right\}$ представляющим смежный класс $I = [\{0\}]$. Смотрите также пример из 7.1.4, где мы делили единичный квадрат. Здесь также наши треугольники ABD и BCD можно достроить до прямоугольников с основаниями AD и DC соответственно и высотой BD и провести аналогичные рассуждения. Теперь можем перенести наше рассмотрение в фактор-кольцо P_J/I_J, где они представляют **разные выделенные элементы** (разные «хвосты» соответствующих «радиусов» данных процессов деления отрезков DC и AD) из U_J в идеале I_J: $\left\{\frac{1}{n}\right\}+J$ и $\left\{\frac{3}{n}\right\}+J$, отношение которых равно $\frac{1}{3}$ или 3. Можно каждый раз делить эти отрезки и на n^2 одинаковых частей, и перейти к последовательностям $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ и $\left\{\frac{3}{n^2}\right\}$, и вообще, на любые ненулевые вещественные числа неограниченно большой положительной последовательности $\{a_n\}$, получая при этом последовательности, сходящиеся к нулю, принадлежащие $\widetilde{U}$, лишь бы деления шли синхронно для обоих отрезков. То есть, чтобы отрезок DC, вместе с рассматриваемыми делениями, являлся копией, увеличенной в три раза, отрезка AD, с теми же делениями. В любом случае, чтобы выделенные элементы $\{a_n\}+J$ и $\{b_n\}+J$, где $\{a_n\},\{b_n\} \in U_J$, имели отношение равное 3 или $\frac{1}{3}$. Другими словами, были мультипликативно подобны с коэффициентом 3 или $\frac{1}{3}$. Исходя из того, что сходящиеся последовательности рассматриваются как сходящиеся итерационные процессы, можно сказать, что скорость сходимости (к нулю) одной из них в три раза быстрее скорости сходимости другой. Скорости сходимости определяются «радиусами» сходящихся итерационных процессов. Теперь понятно, почему принцип Кавальери здесь не сработал и площади этих треугольников не равны, несмотря на взаимную однозначность «неделимых». «Неделимые» (точки прямой или отрезка) имеют неопределенную неограниченно малую «длину», все зависит от того, как был организован итерационный процесс. С этой точки зрения в математике нет «неделимых».

7.2.3 Множество Витали или множество не измеримое по Лебегу. Процитируем из Википедии построение множества Витали.

Рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\sim$ на ке $[0;1]$: $x{\sim}y$ если разница $x-y$ рациональна. Как обычно, это отношение эквивалентности разбивает интервал $[0;1]$ на классы эквивалентности, каждый из которых имеет счётную мощность, но их количество имеет мощность континуума. Далее, из каждого класса эквивалентности выберем по представителю — одной **точке** (здесь мы пользуемся аксиомой выбора). Тогда полученное множество E представителей будет неизмеримым.

Действительно, если сдвинуть E **счётное число** раз на ***<u>все рациональные числа</u>*** из интервала $[-1;1]$, то объединение будет содержать весь отрезок $[0;1]$, но при этом оно будет содержаться в отрезке $[-1;2]$. При этом «сдвинутые копии» множества E не будут пересекаться друг с другом, что непосредственно следует из построения $\sim$ и E.

Предположим, что E измеримо по Лебегу, тогда возможны 2 варианта.

- Мера E равна нулю. Тогда мера интервала $[0;1]$, как счётного объединения множеств меры нуль, тоже будет равна нулю.
- Мера E больше нуля. Тогда аналогично заключаем, что мера интервала $[-1;2]$, в силу счётной аддитивности меры Лебега, будет бесконечна.

В обоих случаях получается противоречие. Таким образом, множество Витали не измеримо по Лебегу.

(см.https://ru.wikipedia.org/wiki/ Множество Витали, [22]) (см.также [14])

Подчеркнуто и выделено жирным шрифтом мной.

Прежде всего, еще раз отметим, что отрезок не состоит из вещественных чисел. Точки, точнее их «радиусы» можно задавать выделенными элементами, которые определяются заданными итерационными процессами. Это показало рассмотрение парадокса Кавальери. В рассуждениях при построении множества Витали точки (смежные классы в факторкольце P_J/I_J) на вещественной прямой (на отрезке) отождествляются с числами (одним представителем смежных классов в фактор-кольце P_J/I_J), поэтому вместо точек, в нашем понимании, как класса сходящихся последовательностей по идеалу I_J, работа идет с представителями, взятыми по одному из каждого смежного класса, то есть с местами, в нашем понимании. А это не соответствует понятию непрерывности, как было показано в 6.1.2. У точек есть неограниченно малая «длина» («радиус» сходящегося итерационного процесса), а у места (числа) этого нет. То есть в поле вещественных чисел, в силу изоморфизма $R \cong P/I \cong {}^{(P/J)}\big/_{(I/J)} = P_J/I_J$, числа представляясь одним представителем соответствующего смежного класса, образуют как бы **скелет** вещественной прямой.

Кроме того, исходя из рассуждений, приведенных в 6.1.3, сдвиг на ***все рациональные числа*** приводит к противоречию, в силу неопределенности «длины» между рациональными числами, которые неограниченно уплотняемы. Также, хочется обратить внимание еще на то, что когда мы определяем отношение эквивалентности $\sim$, то рассматриваем (рациональную) разность двух (т.е. **конечного количества**) чисел x и y, а сдвигаем **счетное число** раз. Множество E содержит одно рациональное число, например, ноль – «0». Вместе с множеством E оно (число «0») сдвигается и на рациональные числа лексикографической последовательности, принадлежащей классу эквивалентности $\left[\frac{\pi}{10}\right]$ (по определению Кантора: *Вещественное число есть класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел.*). Этих сдвигов счетное число, и все они сдвигаются на рациональные числа, но в итоге в орбите нуля может оказаться иррациональное число $\frac{\pi}{10}$, которое определено этой лексикографической последовательностью, так как эта последовательность принадлежит смежному классу $\left[\frac{\pi}{10}\right]$. Это произойдет, если относиться к множеству **всех рациональных чисел**, как к **актуально бесконечному** множеству, что не так.

Комментарий. Считать, что все рациональные числа уже построены, означает, что произошла актуализация бесконечности рациональных чисел. С алгебраической точки зрения, это факторизация кольца сходящихся последовательностей с рациональными числами по идеалу последовательностей, сходящихся к нулю. Согласно изоморфизму $K_J/I_J \cong P_J/I_J \cong R$ (где идеалы I_J – аддитивные абелевы группы последовательностей сходящихся к нулю, каждый в своем кольце, несмотря на одинаковое обозначение), полю вещественных чисел, произошел предельный переход, который позволил определить иррациональные числа.

Таким образом, рассуждение которое было использовано при построении множества Витали (сдвиг на ***все рациональные числа***), нельзя считать корректным. Действительно, число «пи» можем записать, как **счетное** число сдвигов (один сдвиг на рациональное число, как операция прибавления одного рационального числа: $x - y = \frac{m}{n}$ или $x = y + \frac{m}{n}$) на рациональные числа: $0;\ 0+3;\ 0+3+0{,}1;\ 0+3+0{,}1+0{,}04;$ ..., то есть десятая часть числа «пи» попадет в орбиту сдвигов рационального числа 0 из множества E (если, например, выделить из всего множества сдвигов подпоследовательность), если счетное множество считать **актуально бесконечным**, а не счетно неограниченным. Актуализация, как отмечено в комментарии, здесь в каком-то смысле означает предельный переход. В алгебре, повторюсь, если эквивалентность определяется для конечного числа (обычно для двух) элементов, то и операции на классах эквивалентности также определены для конечного (а не для счетного) числа элементов. Можно возразить, что рассматриваются только одноразовые или конечно разовые сдвиги на **все рациональные числа**, но тогда опять упираемся в неограниченную уплотняемость рациональных чисел (см.6.1.3), что не дает возможность говорить о сдвигах на **ВСЕ рациональные числа**, – каждый раз процесс сдвига можно неограниченно продолжать. Кроме того, отель Гильберта и другие рассуждения про непронумерованные члены (в которых может быть пересечение «сдвинутых копий», не определяемое числовыми величинами), вполне достаточны для того, чтобы отвергнуть построение множества Витали. **Непрерывное не состоит из раздробленных частей.** Теперь можно перейти к рассмотрению парадокса Банаха-Тарского.

7.2.4 Парадокс Банаха-Тарского.

Осторожнее на поворотах

Любителям острых ощущений

В [14] (Ященко – парадоксы теории множеств) на стр 18-19 написано, что *при доказательстве парадокса Банаха-Тарского, кроме аксиомы выбора, используются построение множества Витали, неизмеримого относительно произвольной «хорошей» меры, сдвиг натурального ряда (если к каждому натуральному числу прибавить 1, то получится тот же самый натуральный ряд и еще одна точка) и еще некоторые … утверждения.* В принципе этого (использования множества Витали) достаточно, чтобы понять в чем некорректность рассуждений при построении парадокса Банаха-Тарского. Здесь также работа идет со скелетом вещественной прямой. Однако и здесь интересно будет рассмотреть механизм, который показывает, что сдвиг (изометрия), как взаимно однозначное соответствие, в случае счетно неограниченных множеств, не сохраняет расстояние. Рассмотрим наборы, состоящие из нулей и единиц.

				…	…	…	…
			000	…	…	…	…
			001	…	…	…	…
		00	010	…	…	…	…
Начинаются на ноль	0	01	011	…	…	…	…
Начинаются на единицу	1	10	100	…	…	…	…
		11	101	…	…	…	…
			110	…	…	…	…
			111	…	…	…	…
				…	…	…	…
Количество наборов из n нулей и единиц	2	2^2	2^3	…	2^n	2^{n+1}	…

При любом n (наибольшая конечная длина наборов), количество наборов начинающихся на «0» будет в два раза меньше общего количества наборов. Например, при $n = 3$, общее количество наборов длины меньшей или равной трем, равно $2 + 2^2 + 2^3 = 14$, а начинающихся на ноль равно $1 + 2 + 2^2 = 7$, то есть в два раза меньше. А так как множество натуральных чисел N состоит из конечных натуральных чисел n, то это верно и для счетно неограниченного количества натуральных чисел. Множество N – счетно неограниченно, а не бесконечно, и, значит, все рассуждения легитимны (правомерны) только для конкретных конечных натуральных чисел. Итак, на n —том шаге, общее количество наборов длины $\leqslant n$, равно $2^n - 2$, а начинающихся на ноль – $2^{n-1} - 1$, соответственно отношение равно $\frac{1}{2} = \frac{2^{n-1}-1}{2^n-2}$. Взаимно-однозначное соответствие между множеством всех наборов и множеством наборов, начинающихся на ноль (путем стирания одного нуля вначале наборов, начинающихся на ноль, или приписывания нуля в начале наборов всего множества), сохраняет полученное отношение, равное $\frac{1}{2}$. В парадоксе Банаха-Тарского, **под точкой** в пространстве **понимается место**, определенное тремя координатами (числами), а место (не точка) не имеет неограниченно малой неопределенной величины (объема) – ее величина равна нулю. Одно это дает право считать построение парадокса некорректным.

Теперь, рассуждая также, как и в 6.1.3, о том, как расположены рациональные числа (места) на отрезке, мы видим, что соответствующее движение в виде поворота (изометрия) отображает множество мест (полученных поворотами одного места) во множество мест, которые расположены более плотно, чем прежде.

Кроме того, в парадоксе Банаха-Тарского рассматривая полюса, приходится закрывать пустоты по схеме отеля Гильберта, но это, как мы выяснили, невозможно. Пустоты останутся, только они не будут иметь номеров.

§ 7.3 Апории Зенона Элейского

7.3.1 Стрела летит внутри идеала. Процитируем формулировку парадокса летящей стрелы.

Летящая стрела неподвижна, так как в каждый момент времени она занимает равное себе положение, то есть покоится; поскольку она покоится в каждый момент времени, то она покоится во все моменты времени, то есть не существует момента времени, в котором стрела совершает движение.

(ссылка: https://ru.wikipedia.org/wiki/Зенон_Элейский#Апории_Зенона (Стрела_Зенона)[23]*)*

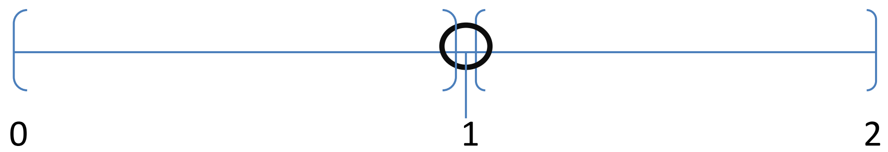
Если находясь в факторкольце P_J/I_J, все последовательности смежного класса $\left\{\left(\overline{\frac{1}{n}}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} + J$ (выделенный элемент) умножить на 2, то получим другой смежный класс $\left\{\left(\overline{\frac{2}{n}}\right)\right\} = \left\{\frac{2}{n}\right\} + J$. Соответственно и «хвост» изменится в два раза. Однако, в силу неархимедовости идеала I_J, мы останемся в этом идеале I_J. Поэтому, если ненулевая скорость стрелы равна $v = \frac{s}{t}$ (считая, что на некотором расстоянии длиной s она не меняется), исходя из того, что *любую последовательность можно представить отношением последовательностей из* I_J (см. главу 2), скорость v можно представить как стабилизирующуюся последовательность $\{\bar{v}\} = \{v\} + J$, эквивалентно равную отношению $\frac{\{\bar{S}_n\}}{\{\bar{t}_n\}} = \left\{\left(\overline{\frac{S_n}{t_n}}\right)\right\} \approx \{\bar{v}\}$, где $\{S_n\}$ и $\{t_n\}$ $(n = 1,2,3,\dots)$ представляют смежные классы в U_J по идеалу J (определяют «хвосты»). Другими словами $\{\bar{S}_n\}$ и $\{\bar{t}_n\}$ мультипликативно квазиподобны с коэффициентом v. Таким образом, если стрела за время $\{\bar{t}_0\}$ оказалась в месте $\{\bar{S}_0\}$, то за неограниченно малое время $\{\bar{t}_n\}$, время изменится от $\{\bar{t}_0\}$ до $\{\bar{t}_0\} + \{\bar{t}_n\} = \{(\overline{t_0 + t_n})\} \approx \{\bar{t}_0\}$, то есть останется внутри точки, соответствующей значению t_0. А за это изменение времени стрела пролетит неограниченно малое расстояние $\{\bar{S}_n\}$, и стрела также останется внутри точки $\{\bar{S}_0\} + \{\bar{S}_n\} = \{\overline{S_0 + S_n}\} \approx \{\bar{S}_0\}$, соответствующей значению S_0. То есть $\{\bar{t}_0\}$ и $\{(\overline{t_0 + t_n})\}$, а также $\{\bar{S}_0\}$ и $\{\overline{S_0 + S_n}\}$ мультипликативно квазиподобны с коэффициентом равным единице. Внутри точки происходят большие невидимые изменения (переходят из одного смежного класса по идеалу J в другие, «хвосты» меняются), которые, накапливаясь, выходят наружу, становятся видимыми опять же в результате неограниченно большого процесса накопления, который интерпретируется неограниченно большой последовательностью. Стрела летит внутри точки. Если $S_0 = 0$, то получается, что стрела летит внутри идеала, интерпретирующего точку (то есть внутри точки), которая соответствует значению (месту) ноль. На самом деле, в поле вещественных чисел процесс накопления, в силу неархимедовости идеала I_J, «увидеть» нельзя, так как нет неограниченно больших чисел. Это можно «увидеть» в «недокольце» B_J, которое построено выше.

Если движение стрелы непрерывно, то определение **момента времени** и есть **отрезок** (некая протяженность) **неограниченно малой неопределенной длины** (времени, который определяется некоторым физическим процессом), который нами определяется **как точка**.

7.3.2 Ахиллес и черепаха. Как происходит непрерывное движение в поле вещественных чисел R от всей совокупности чисел интервала $(0;1)$ к числу 1. Для всякого $\alpha \in (0;1)$, так как $\alpha < 1$, получаем, что $1-\alpha > 0$, из чего следует, что из любого $\alpha \in (0;1)$, сразу в 1 попасть нельзя – между ними есть другие вещественные числа.

В фактор-кольце P_J/I_J, например, в последовательности $\left(0{,}98; 0{,}998; \dots; 0{,}\underbrace{9\dots9}_{n}8; \dots\right)$ все члены последовательности принадлежат $(0;1)$, но сам смежный класс по идеалу J, как выделенный представитель, определенный этой последовательностью, принадлежит $[1]+J$ по идеалу I_J. А когда члены этой последовательности перестают принадлежать $(0;1)$ и станут принадлежать $[1]+J$? Тогда, когда последовательность превращается в непронумерованный «хвост» в смежном классе по идеалу J (см. главу 6). А это не настает с конкретным фиксированным n. Здесь как раз и проявляется диалектический подход к множеству натуральных чисел, рассмотренный в главе 1. Во истину: мысль, произнесенная вслух – ложь (это, только что написанное – тоже ложь? Нет – я молча написал!). Скажем, что уже настал переход, тогда процесс остановится на конкретном n, а это ложь. Скажем, что это не настанет никогда – тоже ложь, так как $\left\{0{,}\underbrace{9\dots9}_{n}8\right\}+J \in [1]+J$ (n равен индексу члена последовательности). Оно не настанет ни при каком натуральном n. Значит, отрицая все конкретные натуральные числа (для которых ложь), мы переходим к состоянию в котором отсутствует нумерация натуральными числами. Уже не ложь, но еще и не правда (непротиворечивость, как замена **истины** на **не установление лжи**). Так как последовательность $\left\{0{,}\underbrace{9\dots9}_{n}8\right\}$ (и такие же другие сходящиеся к 1, одновременно убегая из $(0;1)$, не добегает, так как полностью не совпадает с 1). Вместо восьмерки может быть, например, любая последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$, необязательно сходящаяся: $\left\{0,\underbrace{9\dots9}_{n}+0,\underbrace{0\dots0}_{n}a_n\right\}+J$. Находясь между ними и, соединяя их, реализуется непрерывность на вещественной прямой – одновременно и там, и там и, в тоже время, ни там, ни там. Непрерывность не дает возможности отделить друг от друга ее составляющие, а значит, и определить полную упорядоченность.

Что соединяет на вещественной прямой интервалы $(0;1)$ и $(1;2)$ – место или точка? Место, определяемое смежным классом стабилизирующихся последовательностей $\{1\}+J$, должно «зацепить» оба интервала. Интервалы зацепить единицу не могут, иначе станут полуинтервалами $(0;1]$ или $[1;2)$. Значит, их соединяет точка (это соответствует сечению Дедекинда), как смежный класс $[1]+J$ – «хвостов» последовательностей, сходящихся к единице. Точка, как место с «ручечками», цепляющая оба интервала. «Ручечками» являются, например, сплетающиеся слева и справа последовательности, например, типа $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}+J\in[1]+J$.



На рисунке изображено место (ядро) 1, точка 1 – в виде окружности и, два интервала, которые соединяет точка 1, пересекаясь в непронумерованных членах последовательности произвольного выделенного элемента. И с точностью до непронумерованных членов последовательности происходит разбиение на эквивалентные классы смежности кольца P. Поэтому кажется, что пересечений смежных классов нет, – мы учитывали лишь пронумерованные члены. А это привело к тому, что непрерывность определялась всюду плотностью вещественных чисел на вещественной прямой и полнотой. **Еще раз**, обратившись ко второму замечательному пределу, убеждаемся, что в этом случае невидимые выщербленные «крапинки», в виде «бесконечно малых величин» (т.е. «хвостов» неограниченно малых последовательностей, как мы их интерпретировали) разрушают наше былое представление о непрерывности.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)^{10^n}=e^{-1}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)^{n}=1$, то есть, если $1-\frac{1}{10^n}$ возводится в степень n, то «мелочи» типа $\frac{1}{10^n}$, которой не хватает до единицы не замечаются. А почему? А потому, что по сравнению с n, «мелочь» типа $\frac{1}{10^n}$ не просчитывается, а, значит, внутри последовательности $\{n\}$, члены вида 10^n (здесь 10^n есть номер члена последовательности $\{n\}$, то есть $\{10^n\}$ как подпоследовательность последовательности $\{n\}$) не могут получить номера при неограниченном росте n. Последовательность $\{n\}$ является неограниченно малой по отношению к последовательности $\{10^n\}$, если их рассматривать как отдельные последовательности.

Эти проблемы заметил еще Зенон Элейский около 500 лет до н.э., который замечательно отразил их в ряде парадоксов, один из которых, парадокс летящей стрелы, мы уже рассмотрели. Наиболее известный из них парадокс про Ахиллеса и черепаху. Будем считать, что Ахиллес и черепаха не имеют размеров (равны нулю). Суть парадокса: как только Ахиллес добежит туда, где находилась черепаха в момент начала движения Ахиллеса, черепаха хоть немного отползет и так далее. Таким образом, Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Здесь все не так просто, рассмотрим сначала случаи (в том числе, фантастические), когда Ахиллес, в действительности не догонит черепаху.

«Не догоняю…»
Ахиллес
«Тише едешь – дальше будешь …»
Черепаха
«Нас не догонят, нас не догонят …»
Две черепахи «Та» и «Ту»

- Расстояние между ними такое, что Ахиллесу и жизни не хватит, чтобы его пробежать;
- Расстояние между ними такое, что Ахиллесу нужно будет спать, есть и прочее и черепахе тоже (о равномерности

движения, в этом случае, уже нет речи) – все это учесть в задаче, значит, ее значительно усложнить, и уклониться от сути парадокса (в каких-то случаях, может оказаться, что, так как черепаха меньше спит, мало тратит время на еду и прочее делает на ходу, Ахиллес не сможет ее догнать);

- Пусть расстояние между ними разумное, например, 1000 метров. Если считать, что Ахиллес бежит в два раза быстрее черепахи, и равномерно (в среднем), то может быть следующая ситуация: пусть Ахиллес в первый раз потратит 50 лет (на 1000 метров, типа это были две черепахи, просто одну из них звали Ахиллес), пробегая до места, где была черепаха, во второй раз, соответственно, ему потребуется 25 лет, и так далее. А так как черепахи живут «триста» лет, то вряд ли Ахиллес, проживший много меньше ста лет, доползет до черепахи.
- Пусть опять расстояние между ними разумное, например, 1000 метров. Если снова считать, что Ахиллес бежит в два раза быстрее черепахи, но не равномерно (вначале быстрее, чем в прошлый раз), то может быть следующая ситуация: пусть Ахиллес каждый раз тратит минуту, пробегая до места, где была черепаха. Если рассмотреть соответствующую последовательность с неограниченно большим числом членов: 1000; 500; 250; 125; и так далее, то Ахиллесу потребуется неограниченно большое количество минут, чтобы догнать черепаху, то есть он, на самом деле, не догонит злосчастную черепаху.
- Более хитрый пример. Пусть, как и в предыдущем случае, Ахиллес бежит в два раза быстрее черепахи и пробегает 1000; 500; 250; 125; и так далее, соответственно, за время (в часах, в минутах или секундах) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$, то есть, если составить последовательность с накоплением пройденного: $1000; 1500; 1750; 1875; \dots$, то, соответственно, время будет потрачено $1; 1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n}; \dots$. А, так как сумма гармонического ряда неограниченна сверху, то и

время, которое потребуется Ахиллесу, чтобы догнать черепаху неограниченно.

Рассмотренные случаи, говорят о том, что нам нужны будут естественные предположения о расстоянии между ними, равномерности движения участников забега, а также об их скоростях. Рассмотрим общий случай. Пусть Ахиллес и черепаха двигаются равномерно и по прямой в одном направлении. Если рассматривать их движение в солнечной системе, то с учетом вращения земли (на которой они находятся) вокруг солнца и вращения земли вокруг своей оси, движение каждого из участников забега будет слишком сложным, к тому же придется учитывать понятие кратчайшего расстояния между ними. Нам необходимо только лишь объяснить суть парадокса, которая (немного переформулируем) заключается в том, что **каждый раз**, когда Ахиллес добегает до того места, где находилась черепаха, когда Ахиллес начинал (продолжал) пробегать очередное расстояние, то черепахи на том месте уже не было, что приводит к парадоксальному выводу о том, что Ахиллес не догонит черепаху.

Если же рассматривать две точки (Ахиллес и черепаха) в пространстве и их движения с учетом их вращений вместе с землей вокруг Солнца, земли вокруг своей оси, движения вселенной и так далее (то есть более широко не привязываясь к Солнцу и, вообще, к чему бы то ни было), при этом «видя» только эти точки, то вообще будет непонятно какая из этих точек к какой движется, мы только сможем «видеть» их сближение, и то, если будем иметь масштаб, например, размер своего тела, при условии, что оно не будет меняться.

Пусть Ахиллес бежит в k раз быстрее черепахи (k – вещественное число, большее единицы): $v_A = kv_ч$, где v_A – обозначает скорость Ахиллеса, $v_ч$ – скорость черепахи, которая больше нуля. Пусть за время t_1 Ахиллес пробегает расстояние s_1 до первого фиксированного места, где находилась черепаха, t_2 – соответственно, расстояние s_2 до второго, и так далее. Получаем последовательности $\{t_n\} = (t_1; t_2; t_3; \dots; t_n; \dots)$ и $\{s_n\} = (s_1; s_2; s_3; \dots; s_n; \dots)$. Откуда строим последовательности с накоплением $\{T_n\} = (t_1; t_1 + t_2; t_1 + t_2 + t_3; \dots; t_1 + t_2 + \dots + t_n; \dots)$ и $\{S_n^A\} = (s_1; s_1 + s_2; s_1 + s_2 + s_3; \dots; s_1 + s_2 + \dots + s_n; \dots)$, причем черепаха убегает, пробегая, соответственно $\{S_n^ч\} = (s_2; s_2 + s_3; s_2 + s_3 + s_4; \dots; s_2 + s_3 + \dots + s_{n-1}; \dots)$, с тем же временем, соответствующим последовательности $\{T_n\}$. Заметим, что $\{S_n^ч\}$ является подпоследовательностью сходящейся последовательности $\{S_n^A\}$, поэтому они имеют один и тот же предел. Далее, рассматривая скорости v_A и $v_ч$, как стационарные последовательности $\{v_A\} = (v_A; v_A; v_A; \dots; v_A; \dots)$ и $\{v_ч\} = (v_ч; v_ч; v_ч; \dots; v_ч; \dots)$ получаем, что $\{S_n^A\} = \{v_A\}\{T_n\} = k\{v_ч\}\{T_n\} = kv_ч\{1\}\{T_n\} = kv_ч\{T_n\}$ и $\{S_n^ч\} = \{v_ч\}\{T_n\} = v_ч\{T_n\}$. Это означает, что $\{S_n^A\}$ и $\{S_n^ч\}$ мультипликативно подобны $\{T_n\}$, соответственно, с коэффициентами $kv_ч$ и $v_ч$, откуда, мультипликативно подобны между собой с коэффициентом k. Таким образом, мы свели нашу задачу к задаче о том, как «движется» время. Если $\{T_n\}$ является неограниченно большой последовательностью (как, например, в последнем примере), то Ахиллес не догонит черепаху.

Если за какое-то время t Ахиллес равномерно проходит расстояние x, а черепаха, соответственно, – y (единицы измерения, например, метры и секунды), то отношение, представленное в виде стационарной последовательности $\left\{\frac{x}{t}\right\}$, можно представить в виде $\left\{\frac{dx}{dt}\right\}$ (см. главу 2), где $\{dx\}$ и $\{dt\}$ некоторые последовательности из $\widetilde{U}$, то есть $v_A = \left\{\frac{x}{t}\right\} = \left\{\frac{dx}{dt}\right\}$. Аналогично, $v_ч = \left\{\frac{y}{t}\right\} = \left\{\frac{dy}{dt}\right\}$. Тогда отношение скоростей $\left\{\frac{x}{t}\right\} : \left\{\frac{y}{t}\right\} = \left\{\frac{dx}{dt}\right\} : \left\{\frac{dy}{dt}\right\} = \left\{\frac{dx}{dt}\right\} \cdot \left\{\frac{dt}{dy}\right\} = \left\{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy}\right\} = \left\{\frac{dx}{dy}\right\} = \left\{\frac{v_A}{v_ч}\right\} = k$. Скорости Ахиллеса и черепахи удовлетворяют аксиоме Архимеда по отношению друг к другу: умножением на конечное число можно перевести одну последовательность в другую (см. главу 3). Для последовательностей архимедовость эквивалентна квазиподобию с коэффициентом отличном от нуля. Параллели с привычной записью очевидны: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{v_A}{v_ч} = k$.

Догоним и перегоним.

Лозунг из недавнего прошлого

Теперь, задав последовательность $\{T_n\}$, соответствующую итерационному процессу (изменения времени), заданному Зеноном Элейским, мы видим, что на каждом конечном **(пронумерованном)** шаге (индексе члена последовательности), Ахиллес действительно будет **позади черепахи** (в прошлом у черепахи: «… добежит туда, где **была** черепаха»), а так как во всяком неограниченном процессе имеется непронумерованный «хвост», где отсутствует упорядоченность, то остается отметить, что разность между последовательностями, соответствующими движениям черепахи и Ахиллеса есть последовательность из $\widetilde{U}$. Если $\{T_n\}$ сходящаяся последовательность, то рано или поздно, отрицая все пронумерованные члены последовательности, Ахиллес и черепаха окажутся в «хвосте» своих последовательностей, мультипликативно квазиподобных с коэффициентом равным k, то есть в одной точке, где движение уже не будет носить упорядоченный характер. Почему не будет носить упорядоченный характер? Потому, что как только есть упорядоченность, то у каждого члена последовательности, начиная со второго, есть непосредственный предыдущий и непосредственный последующий, а это все еще дискретность в рассматриваемых последовательностях. Таким образом, упорядоченность в последовательностях тесно связана с пронумерованностью. «Хвост» находится за пределами пронумерованности. Непронумерованность в последовательностях не упорядочена.

Еще аргументы

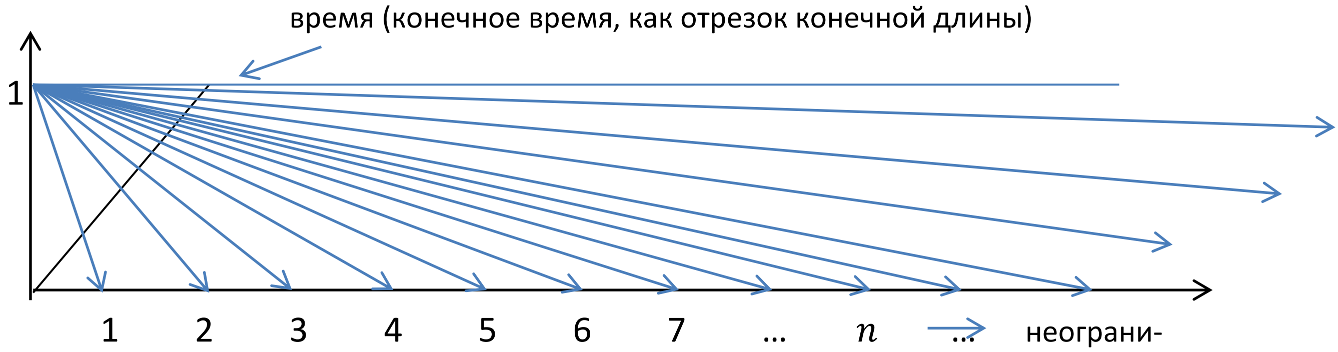
Жалко выбрасывать

На самом деле, с учетом рассуждений про ленивого Деда Мороза, кроме конечных шагов, несмотря на их неограниченность, всегда есть «неучтенка», в которой нет упорядоченности, иначе нарушилась бы непрерывность. Действительно, повторяя рассуждения из главы 5, время 24-00 и 00-00 – это одно и то же? И чему это принадлежат показания этого времени: предыдущим или следующим суткам? Если это одно и тоже, то принадлежат обоим суткам одновременно, то есть сразу больше и меньше себя, даже равно себе. Точка на прямой, как класс последовательностей, сходящихся к одному и тому же значению, вполне соответствует конструкции непрерывности времени, так как в нем есть и двусторонние сходящиеся последовательности. Они как бы переплетают непрерывно соединенные части. Таким образом, считая, что на каждом шаге, выраженном натуральным числом, Ахиллес действительно находится позади, мы не можем делать вывод о том, что Ахиллес ее не догонит, так как есть еще «шаги», которые не могут быть выражены натуральными числами (в силу превосходящей их мощности), и, когда они «наступают» (а они наступают в силу непрерывности движения, причем не как действие, а как состояние, возникающее в процессе движения), то в силу неупорядоченности этих «после шагов», говорить о том, что Ахиллес обязательно всегда останется позади, не приходится. Это состояние возникает, когда они фактически оказываются в одной точке, так как их нельзя отделить никакой конечной величиной. Расстояние между Ахиллесом и черепахой в фактор кольце P_J/I_J выражается последовательностью, сходящейся к нулю, то есть принадлежит идеалу I_J, который, как мы выяснили, в фактор кольце изоморфном полю вещественных чисел не обладает архимедовостью, а его «хвост» находится за пределами любого конечного числа индексов начального отрезка последовательности.

Действительно, если Ахиллес в два раза быстрее движется черепахи (на одной линии и в одну сторону), расстояние между ними 1 километр, то на миллионном шаге расстояние между ними станет $\frac{1}{2^{1000000}}$ километра. На n —м шаге – $\frac{1}{2^n}$ километра. В итоге получается последовательность $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. На любом конечном натуральном шаге расстояние между Ахиллесом и черепахой положительно и Ахиллес позади черепахи. И для любого малого расстояния r между ними, найдется шаг n, такой что $\frac{1}{2^n} \geq r > \frac{1}{2^{n+1}}$. Считая, что движение непрерывно, получается, так как для любого $r > 0$ всегда есть меньшее значение $\frac{1}{2^{n+1}}$ (что дискретно), то непрерывность появляется, когда $\frac{1}{2^{n+1}}$ пропадает, как бы «растворяется» при неограниченном увеличении n (превращается в «хвост»). На практике, становится существенно меньше возможных размеров Ахиллеса и черепахи, например, соразмерно размерам атома.

Опять же несколько повторяясь, получается, как бы неучтенное множество «шагов», которые и шагами-то трудно назвать, так как они не выражаются числовыми величинами, а лишь «хвостами» соответствующих последовательностей. Они не «шаги», а движение «после шагов», которые уже не выражаются натуральными числами. «Хвосты» ведь также не зависят от любого начального отрезка последовательностей, и в каком-то смысле находятся после пронумерованных членов последовательностей.

Логика здесь такова: пронумерованные шаги – это прошлое черепахи, они нумеруются, где черепаха уже **была** и Ахиллес **в прошлом** у черепахи, а «после» пронумерованных шагов, Ахиллес уже в настоящем у черепахи, то есть они в одной точке (отрезке неограниченно малой длины), где (внутри точки) уже нет той упорядоченности, которые соответствуют членам последовательности. Непрерывность (движения) описываются с точностью до «хвостов». А далее рассуждаем, как в случае летящей стрелы внутри идеала (точки). Как «упаковывается» неограниченно большое количество шагов в конечное время показывает следующая конструкция:



ченно большое количество шагов

Логика конечных чисел здесь перестает работать, так как расстояние между Ахиллесом и черепахой (до их встречи) со временем, связанным с шагами интерпретируется выделенными представителями $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}+J$, в котором любой начальный отрезок нивелируется. То есть при любом натуральном n – это не «хвост», а после любого n – это «хвост», который как элемент из U_J положителен и отличен от нулевого в P_J. Но это, все равно, означает, что Ахиллес и черепаха окажутся в одной точке, так как этот «хвост» меньше любого положительного расстояния.

Аналогично, рассмотрим дихотомию Зенона Элейского: чтобы преодолеть путь, нужно сначала преодолеть половину пути, а чтобы преодолеть половину пути, нужно сначала преодолеть половину половины, и так до бесконечности. Поэтому движение никогда не начнётся.([23])

Здесь движение начинается внутри точки и начало движения не определяется никакими числовыми величинами и, соответственно, какой-либо упорядоченностью, то есть понятие «первая половина», с которой начинается движение, не имеет смысла.

7.3.3 Если б не физики, математики жили бы вечно… . Так как отношение $\{S_n^A\}/\{S_n^ч\}=\{k\}$, то получается, что время как бы ни причем. А.Пуанкаре заметил (см.[24]), что нет одновременности для двух событий – должно быть третье, относительно которого, путем синхронизации, можно говорить об одновременности. Чтобы задать время, необходим равномерно повторяющийся процесс, в математике такого процесса нет, этот процесс носит физический характер. В математике нет времени.

Но в математике есть незримое понятие одновременности. Например, когда моделируется процесс движения, мы сравниваем соответствующие члены последовательностей, а не произвольные. Первый член первой последовательности с первым членом второй последовательности, второй член со вторым и т.д. Если первый член первой последовательности сравнивать со вторым членом второй последовательности, то получается, что они соответствуют значениям произошедшим одновременно, а значение соответствующее первому члену второй последовательности произошло ранее. Индексы последовательности как раз и указывают, что появляется раньше, что позже. Последовательность – ***после следовать*** *(см. 5.1.3)*. Даже лексикографическое сравнение, не связанное непосредственно с движением, фактически использует понятие одновременности, то есть прошлое настоящее и будущее. Математика может, используя эталон времени, сравнивать промежутки времени, но не задавать сам эталон времени. Эталон времени – это задача физиков.

§ 7.4 Непротиворечивость и закон исключенного третьего

7.4.1 Непротиворечивость, как отрицание закона исключенного третьего. В чем заключается закон исключенного третьего? Возьмем два утверждения A и его полное отрицание $\bar{A}$. Противоречие возникает, когда они оба одновременно истины или ложны. Например, равны или не равны два числа a и b: $a = b$ или $a \neq b$, третьего не дано.

Ноль или не ноль?

Вот в чем вопрос

Когда речь идет о числах, закон исключенного третьего работает. Возьмем теперь вместо числа a стационарную последовательность $\{0\}$, а вместо числа b последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. При любом конечном n $(n = 1,2,3, \dots)$, $\frac{1}{n} \neq 0$, откуда $\left\{\frac{1}{n}\right\} \neq \{0\}$. Но тогда, отрицая каждое конечное n, мы приходим к отрицанию неравенства? Порассуждаем. Каково расстояние между всей совокупности членов последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и нулем? Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдется конечное натуральное n, такое, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Значит, расстояние будет меньше любого положительного вещественного числа, то есть будет равно нулю (по Эйлеру). С другой стороны для любого конечного натурального n найдется такое малое вещественное число $\varepsilon > 0$, что $\frac{1}{n} > \varepsilon$, например, $\varepsilon = \frac{1}{10^n}$. Для каждого конечного n это верно, но будет ли это верно для всей совокупности? В поле вещественных чисел это расстояние будет равно нулю, так как **нет такого ненулевого вещественного числа, которое выражает это расстояние.** Здесь закон исключенного третьего работает. А вот в факторкольце P_J между последовательностью $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и последовательностью $\{0\}$, согласно квалификации (см. главу 6), есть еще много последовательностей строго меньших $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и строго больших $\{0\}$. Вспомним, как строится натуральный ряд, – он строится индуктивно, но тогда и все рассуждения, связанные с ним также должны носить такой же характер, – каждый раз конечный, хотя и в совокупности неограниченный (без актуализации). Классификация неограниченностей показывает, что для любого конечного числа существуют числа бóльшие его, даже для любой неограниченно большой совокупности всегда найдется другая совокупность в каком-то смысле бóльшая ее. По большому счету, все эти рассуждения связаны с тем, что просто **нет наибольшего натурального числа!**

Таким образом, отрицая любые положительные расстояния между совокупностью, выраженной последовательностью $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и нулем, мы не достигаем нуля (в абсолюте). Мы не можем получить противоречия, считая это расстояние равным нулю, в силу отношения эквивалентности в фактор кольце P_J/I_J и изоморфизма $P_J/I_J \cong R$ полю вещественных чисел.

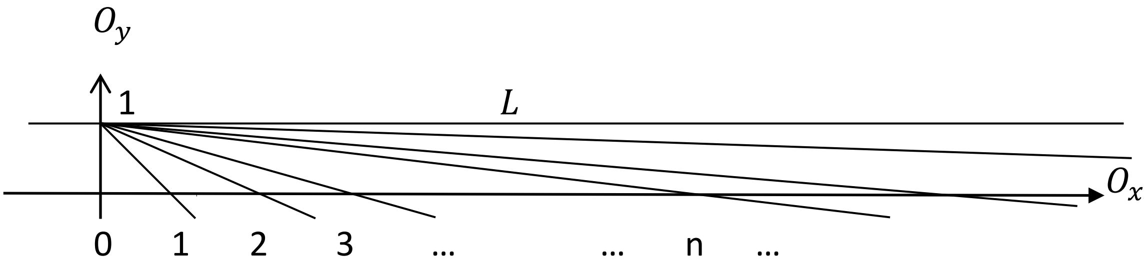
Трехзначная логика: да, нет и не знаю, – вполне вписывается в нашу конструкцию. Если сравнивать два числа, то имея однозначно определяющую запись или обозначение этих чисел, мы в поле вещественных чисел всегда сможем ответить «да» или «нет» на вопрос «равны они или не равны?». В кольце P_J даже лексикографическое сравнение двух последовательностей не всегда дает возможность однозначно определить их равенство. Элементы этого кольца $\{a_n\} + J$ и $\{b_n + J\}$ не зависят от любого начального набора, поэтому не факт, что если при всяком n $\{a_n\} = \{b_n\}$, их «хвосты» также будут равными. Возь-

мем, например, разность двух чисел: $1-0,(9)=0,(0)1$ (не совсем корректная запись для факторкольца P_J и для поля вещественных чисел R, но наглядная для наших рассуждений). По этой разности построим последовательность цифр разрядов после запятой: первая цифра после запятой равна нулю, вторая тоже равна нулю и так далее, в итоге получилась последовательность, состоящая из нулей $(0;0;\ldots;0;\ldots)$. Чему равно число, меньшее единицы, все (индексированные) разряды которого после запятой равны нулю? Равно нулю. А между тем эта разность обратима в (теоретико-множественном) расширении $B_J=P_J\cup U_{J^+}^{-1}\cup U_{J^-}^{-1}$ кольца P_J. В крайнем случае, можно построить кольцо частных $S_J^{-1}P_J$, в которой она также обратима, аналогично тому, как это сделано в главе 2. Рассуждая так же, как в комментариях в 7.1.1, где рассматриваемая разность (относительно) корректно записана в факторкольце P_J: $\{1\}-\{0,(9)\}=\{10^{-n}\}$ (где запись означает $\{0,(9)\}=(0{,}9;0{,}99;\ldots)$, а точнее
$(1;1;\ldots;1;\ldots)-(0{,}9;0{,}99;\ldots;\ 0{,}9\ldots9;\ldots)=(0{,}1;0{,}01;\ldots;0{,}0\ldots01;\ldots)=\{10^{-n}\}$)
видим, что «хвост» последовательности, который интерпретирует нашу разность, имеет неограниченное количество нулей после запятой и отличен от нулевого «хвоста». А так как «хвост» не зависит от любого конечного начального отрезка, то при всяком конечном натуральном n, число вида $0{,}9\ldots9$ с n цифрами 9 в записи, заменим на число 1. Тогда разность будет интерпретирована последовательностью, где каждый член, индексированный конечным натуральным числом равен нулю, а «хвост» разности не равен нулю, так как обратим в некотором расширении.

Закон исключенного третьего здесь не работает. Равенство иногда можно определить их разностью или отношением, когда хотя бы одна из последовательностей содержит конечное число нулевых членов. Многое зависит от того, как задать последовательности, не все последовательности можно задать формульно и не все числа можно «хорошо» представить в виде сходящейся последовательности. Например, числа, обозначенные символами π и e.

7.4.2 Пятый постулат Евклида и счетная неограниченность.

Отрицание всякой конечности с точки зрения факторкольца P_J/I_J (как мы его описали) означает отрицание всех смежных классов, кроме идеала I_J, в котором есть последовательности, состоящие, например, из положительных чисел (факторкольцо P_J/I_J не содержит неограниченно больших последовательностей). Отрицание всякой конечности с точки зрения поля вещественных чисел означает только одно значение – ноль (поле вещественных чисел не содержит бесконечные числа). Поясню, сначала на примере.



На координатной плоскости, через точку с координатами $(0;1)$ параллельно оси O_x проведена прямая L. Через точки $(0;1)$ и $(1;0)$ проведена прямая L_1, через точки $(0;1)$ и $(2;0)$ проведена прямая L_2, и так далее. Построим последовательность прямых: $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ Предельное положение данной последовательности прямых есть прямая L. Одновременно с этим рассмотрим тангенсы внутренних углов треугольников с вершинами $(0;0), (0;1), (n;0)$, при вершинах $(n;0)$, где $n = 1,2,3, \ldots$. Как отношения противолежащего катета к прилежащему, они, соответственно равны: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Эти углы (а, значит, и их тангенсы), соответственно, равны углам между этими прямыми и прямой L при вершине $(0;1)$, как накрест лежащие. В факторкольце P_J, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ попадает в смежный класс $\left\{\frac{1}{n}\right\} + J$, состоящий из последовательностей, у которых такой же «хвост», как и последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Аналогичным образом можно построить последовательность прямых $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \ldots, \tilde{L}_n, \ldots$, тангенсы углов которых будут соответственно равны какой-либо последовательности $\{\tilde{a}_n\} \in \widetilde{U}$. Прямые, тангенсы рассматриваемых углов которых, соответствуют «хвостам» неограниченно малых положительных последовательностей, не совпадают с L и не пересекают O_x в силу того, что как только прямая пересекает O_x, тангенсы соответствующих углов будут иметь конечное ненулевое значение. Таким образом, в кольце P_J мы получим отрицание 5-го постулата Евклида, определяющее построение неевклидовых геометрий. В частности, аксиомы геометрии Лобачевского-Бойяи отрицают 5-й постулат Евклида о единственности прямой на плоскости, проходящей через точку лежащей вне некоторой прямой и не пересекающей ее.

В поле же вещественных чисел, где мы рассматриваем прямые с тангенсами углов, взятых по одному представителю из каждого класса смежности, например, стационарные, – они (тангенсы углов) либо отличны от нуля и имеют конечное вещественное значение, либо ноль. В этом случае только одна прямая не пересекает O_x.

7.4.3 Об идеале J и об объединении идеалов. В заключение главы, рассмотрим в кольце $\bar{P}$ объединение неограниченного числа идеалов следующей цепочки вложенных идеалов (матрешку):

$$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \cdots \subset J_n \subset \cdots, \text{ где}$$

$$J_t = \big\{\{c_n\} | t \text{ такое, что } c_m = 0, \text{при } m > t, c_n \in R, t, m \in N\big\}.$$

Очевидно, что $J_k \cup J_l = J_l$ при $k < l$.

Чему равно объединение $\bigcup_{t\geq 1} J_t$? Получается, что для любого натурального i, идеал J_i не может равняться объединению $\bigcup_{t\geq 1} J_t$, а, значит, у объединения нет такого общего натурального номера, с какого бы все члены последовательностей из идеалов объединения равнялись нулю. Таким образом, это объединение должно совпасть с кольцом $\bar{P}$. Но это не так! Объединение равно, на самом деле, идеалу J. Напомним, как определялся идеал J:

$$J = \big\{\{c_n\} | \text{существует } k, \text{такое, что } c_m = 0, \text{при } m \geqslant k, c_n \in R, k, m \in N\big\}$$

Действительно, $J_t \subset J$, при любом натуральном t. С другой стороны $J \subseteq \bigcup_{t\geq 1} J_t$, так как он как раз и состоит из последовательностей, у которых, начиная с некоторого конечного натурального k, все члены равны нулю. Общего k для всех последовательностей этого класса нет. Каждая последовательность идеала J принадлежит идеалам J_t, начиная с некоторого конечного индекса $t \in N$, а, значит, и их объединению. Таким образом, $\bigcup_{t\geq 1} J_t = J$, а вот $\lim_{t\to\infty} \bigcup_{t\geq 1} J_t = \bar{P}$.

Благодарности

Валентина Прокофьевна Носенко – наша классная руководительница и учительница физики, на последнем звонке высказала нашему классу пожелания, среди которых было следующее. Она сказала: Ваша жизнь будет складываться не из того, что вы приобрели холодильник, машину или дачу – ваша жизнь будет складываться из встреч с людьми, и многое будет зависеть с какими людьми вас сведет судьба. Я желаю вам, чтобы на вашем пути попадались как можно больше хороших людей!

Потрясающее пожелание замечательного педагога!!!

Я на своем пути встречал и встречаю много хороших и прекрасных людей, которые прекрасно повлияли и влияют на мою жизнь – это мои родные и близкие, учителя и наставники, друзья и товарищи, одноклассники и однокурсники, коллеги, ученики и просто хорошие люди – им всем я очень **благодарен**!

Заключение.

Я писал и пишу здесь для себя, исключительно для себя, только для себя, и ни для кого, кроме себя,
… но я хочу, чтобы МИР узнал, КАК я пишу для себя!
автор

Надеюсь, Вам понравилось.

Анонсирую следующую главу, которая дорабатывается.

Вот примерный набор тем.

Глава ∞. Чопопалинки или вольные мысли	
1.	**Поэзия и математика**
2.	**Классификация.** *Самая первая классификация. Классификация и идеалы* Классификация – основной аппарат математики, и не только математики Описывает ли мир математика?
3.	**Идеалы**
4.	**Логика + ничья**
5.	**Теория маразма**
6.	**Ноль или не 0**
7.	**Точность математики + доказательства ?** Доказательство и его логика тесно связаны с законом исключенного третьего – равно или не равно. А как только эквивалентность равенства теряется, то и теряется строгость доказательства.
8.	**Места обитания истины**
9.	**Скорости. Время.**
10.	**БМВ: они не исчезают, – они не просчитываются**
11.	**Закон исключенного третьего да, нет и неопределенность из-за того, что процесс не завершён**
12.	**Аксиомы и теория неограниченности**
13.	**Всё есть число? Соглашаться или нет**

Список использованной литературы

1. Демисенов Б.Н., Бекмухамедова С.М., Искакова У.А. Геометрии и эквивалентное равенство чисел. Вестник Костанайского государственного педагогического института, №2, 2007г.с. 168-173
2. Демисенов Б.Н. Эквивалентное равенство чисел. Материалы Международной научно-практической конференции «Моделирование сложных систем и процессов: теоретический, прикладной и педагогический аспекты», Костанай, 2010
3. Демисенов Б.Н. Счетно неограниченные множества. Материалы Международной научной конференции «Математика, ее применение и преподавание», часть 1, Костанай 2012
4. Янкелевич В.Г. Неприводимый случай. Квант №11, 1971, с.20-21.
5. ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 624 с.
6. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М: «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, - 736 с.
7. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972. – 160 с.
8. Клайн М. Математика. Утрата определённости. М.: Мир, 1984. – 434 с.
9. Хинчин А.Я. Основные понятия математики в средней школе. М., 1961, с.71.
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру, часть 3: Основные структуры алгебры. - М.: МЦНМО, 2009. – 272 с.
11. Лузин Н.Н. О бесконечно малых величинах в преподавании и науке. // Математика в высшем образовании, 2005, №3
12. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2007. – 568 с.
13. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса. Изд-во «Матезис», 1923.
14. Ященко И.В. Парадоксы теории множеств. Библиотека «Математическое просвещение», вып. 20, Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, Москва, 2002, 39с.
15. https://ru.wikipedia.org/wiki/Конструктивные_способы_определения_вещественного_числа
16. Даубен Джозеф У. Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств, В МИРЕ НАУКИ *Scientific American · Издание на русском языке* № 8 · АВГУСТ 1983 · С. 76–86

17. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / под ред. А. Н. Колмогоров, Ф. А. Медведев, А. П. Юшкевич,. — М.: НАУКА, 1985. — (Классики науки). 432 с.
18. Математическая энциклопедия. / Гл. редактор И.М.Виноградов. Издательство М.: «Советская энциклопедия», тома 1-5, 1977-1985
19. https://ru.wikipedia.org/wiki/Дедекинд,_Рихард
20. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ? М.: «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 128 с.
21. https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод неделимых.
22. https://ru.wikipedia.org/wiki/Множество_Витали
23. https://ru.wikipedia.org/wiki/Зенон_Элейский#Апории_Зенона
24. Пуанкаре А. О науке: М.: «Наука», 1983, 560 с.